

THUẬT TOÁN TRONG ĐỒ THỊ

ALGORITHMS IN GRAPHS

Vũ Thị Sơn*, Nguyễn Thị Thúy***ThS. Trường Đại học Hải Phòng**Received: 25/1/2026; Accepted: 5/02/2026; Published: 12/02/2026*

Tóm tắt: Với những ưu điểm vượt trội có thể ứng dụng theo nhiều cách trong cuộc sống, công nghệ thông tin đã giúp công tác quản lý trở nên dễ dàng hơn. Để quản lý một công việc cụ thể của một cơ quan nào đó, người quản lý cần thực hiện nhiều thao tác. Nhờ phần mềm, công việc đó trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Do đó, công tác quản lý bằng phương pháp thủ công sẽ không đáp ứng được nhiệm vụ và mục tiêu của hệ thống, đồng thời ảnh hưởng lớn đến năng suất, chất lượng và hiệu quả công việc. Để khắc phục những nhược điểm trên, đồng thời nhờ sự phát triển nhanh chóng của công nghệ thông tin, việc xây dựng một chương trình quản lý hệ thống “Phòng máy tính” để hỗ trợ quản lý là một nhu cầu cấp thiết hiện nay, nhằm tự động hóa công việc.

Từ khóa: ngăn xếp, hàng đợi, danh sách, dữ liệu, mô hình tuần tự thông tin, cấu trúc, công nghệ.

Abstract: With strong advantages that can be applied in many ways in life, information technology has made management work easier. To manage a specific job of a certain agency, the manager needs to perform many actions. Thanks to software, that job becomes much simpler. Therefore, management work using manual methods will not meet the system's tasks and goals and it will also greatly affect the productivity, quality and efficiency of the work. To overcome the above shortcomings, and at the same time thanks to the rapid development of Information Technology, building a “Computer Room” system management program to help with management is an urgent need. today's urgent need to automate work.

Keywords: stack, queue, list, data, information sequential pattern, structure, technology.

1. Đặt vấn đề

Cấu trúc dữ liệu đồ thị (DLĐT) là một cấu trúc dữ liệu phi tuyến mà ở đó biểu diễn đồ thị bao gồm các đỉnh và các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị (ĐT) với nhau. Mô hình ĐT trong thực tế rất nhiều như mô hình mạng máy tính được xem như một ĐT có mỗi đỉnh là một máy tính, có các cạnh là một liên kết giữa các máy tính khác nhau trong mạng. Các mô hình mạch điện, các hệ thống giao thông, các mô hình mạng cấp nước đều được xem xét như một ĐT. Có thể nói ĐT được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học máy tính

2. Nội dung nghiên cứu**2.1. Đồ thị**

Đồ thị: Bộ đôi $G = \langle V, E \rangle$, trong đó $V = \{1, 2, \dots, n\}$ là tập hợp hữu hạn được gọi là tập đỉnh, E là tập có thứ tự hoặc không có thứ tự các cặp đỉnh trong V được gọi là tập cạnh.

Đồ thị vô hướng: Đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ được gọi là ĐT vô hướng nếu các cạnh thuộc E là các cặp không tính đến thứ tự các đỉnh trong V .

Đơn ĐT vô hướng: Đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ được gọi là đơn ĐT vô hướng nếu G là

ĐT vô hướng và giữa hai đỉnh bất kỳ thuộc V có nhiều nhất một cạnh nối.

Đa đồ thị vô hướng: Đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ được gọi là đơn ĐT vô hướng nếu là ĐT vô hướng và tồn tại một cặp đỉnh trong V có nhiều hơn một cạnh

nối. Cạnh $e_1 \in E, e_2 \in E$ được gọi là cạnh bội nếu chúng cùng chung cặp đỉnh.

Giả đồ thị vô hướng: Đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ bao gồm V là tập đỉnh, E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (hai phần tử không nhất thiết phải khác nhau) trong V được gọi là các cạnh. Cạnh e được gọi là khuyên nếu có dạng $e = (u, u)$, trong đó u là đỉnh nào đó thuộc V .

Đồ thị có hướng: Đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ được gọi là ĐT có hướng nếu các cạnh thuộc E là các cặp có thứ tự các đỉnh trong V khi đó các cạnh được gọi là các cung.

Đơn đồ thị có hướng: Đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ bao gồm V là tập các đỉnh, E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử của V gọi là các cung. Giữa hai đỉnh bất kỳ của G tồn tại nhiều nhất một cung.

Đa đồ thị có hướng: Đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ bao gồm V là tập đỉnh, E là cặp có thứ tự gồm hai phần tử của V được gọi là các cung. Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.

Giả đồ thị có hướng: Đa đồ thị $G = \langle V, E \rangle$, trong đó V là tập đỉnh, E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (hai phần tử không nhất thiết phải khác nhau) trong V được gọi là các cung. Cung e được gọi là khuyên nếu có dạng $e = (u, u)$, trong đó u là đỉnh nào đó thuộc V .

2.2. Các khái niệm trên đồ thị vô hướng

Đỉnh kề. Hai đỉnh u và v của ĐT vô hướng G

$= \langle V, E \rangle$ được gọi là kề nhau nếu (u, v) là cạnh thuộc đồ thị G . Nếu $e = (u, v)$ là cạnh của đồ thị G thì ta nói cạnh này liên thuộc với hai đỉnh u và v , hoặc ta nói cạnh e nối đỉnh u với đỉnh v , đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là đỉnh đầu của cạnh (u, v) .

Bậc của đỉnh. Ta gọi bậc của đỉnh v trong DT vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và ký hiệu là $\deg(v)$. Đỉnh có bậc là 0 được gọi là đỉnh cô lập. Đỉnh có bậc 1 được gọi là đỉnh treo.

Đường đi, chu trình. Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trên DT vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ là dãy $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, trong đó n là số nguyên dương, $x_0 = u, x_n = v, (x_i, x_{i+1}) \in E, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối gọi là chu trình.

Tính liên thông. Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

Thành phần liên thông. DT vô hướng liên thông thì số thành phần liên thông là 1. DT vô hướng không liên thông thì số liên thông của DT là số các DT con của nó liên thông.

Đỉnh trụ. Đỉnh $u \in V$ được gọi là đỉnh trụ nếu loại bỏ u cùng với các cạnh nối với u làm tăng thành phần liên thông của DT.

Cạnh cầu. Cạnh $(u, v) \in E$ được gọi là cầu nếu loại bỏ (u, v) làm tăng thành phần liên thông của DT.

Đỉnh rẽ nhánh. Đỉnh s được gọi là đỉnh rẽ nhánh (đỉnh thất) của cặp đỉnh u, v nếu mọi đường đi từ u đến v đều qua s .

2.3. Các khái niệm trên đồ thị có hướng

Đỉnh kề. Nếu $e = (u, v)$ là cung của DT có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v , hoặc nói cung này đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v . Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của cung (u, v) .

Bán bậc của đỉnh. Ta gọi bán bậc ra của đỉnh v trên DT có hướng là số cung của DT đi ra khỏi v và ký hiệu là $\deg^+(v)$. Ta gọi bán bậc vào của đỉnh v trên DT có hướng là số cung của DT đi vào v và ký hiệu là $\deg^-(v)$.

Đường đi. Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong DT có hướng $G = \langle V, A \rangle$ là dãy $x_0, x_1, \dots, x_n$, trong đó, n là số nguyên dương, $u = x_0, v = x_n, (x_i, x_{i+1}) \in E$. Đường đi như trên có thể biểu diễn thành dãy các cung: $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$. Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối ($u = v$) được gọi là một chu trình. Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có hai cạnh nào lặp lại.

Liên thông mạnh. Đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ được gọi là liên thông mạnh nếu giữa hai đỉnh bất kỳ

$u \in V, v \in V$ đều có đường đi từ u đến v .

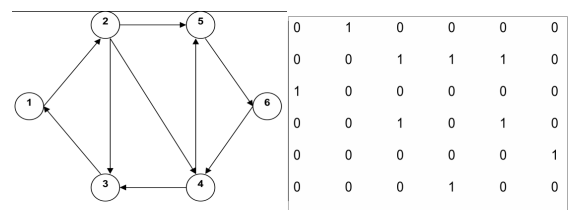
Liên thông yếu. Ta gọi DT vô hướng tương ứng với DT có hướng $G = \langle V, E \rangle$ là DT tạo bởi G và bỏ hướng của các cạnh trong G . Khi đó, DT có hướng $G = \langle V, E \rangle$ được gọi là liên thông yếu nếu DT vô hướng tương ứng với nó là liên thông.

Thành phần liên thông mạnh. Đồ thị con có hướng $H = \langle V_1, E_1 \rangle$ được gọi là một thành phần liên thông mạnh của DT có hướng $G = \langle V, E \rangle$ nếu $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$ và H liên thông mạnh.

2.4. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề

Phương pháp biểu diễn DT bằng ma trận kề là phép làm tương ứng đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ với một ma trận vuông cấp n . Các phần tử của ma trận kề được xác định như dưới đây:

$$a_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (u, v) \in E \\ 0 & \text{nếu } (u, v) \notin E \end{cases}$$



Tính chất của ma trận kề:

- Ma trận kề biểu diễn DT vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ là ma trận đối xứng.
- Ma trận kề biểu diễn DT có hướng $G = \langle V, E \rangle$ thường là không đối xứng.
- Tổng các phần tử của ma trận kề biểu diễn DT vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ bằng $2m$, trong đó m là số cạnh của đồ thị.
- Tổng các phần tử của ma trận kề biểu diễn DT có hướng $G = \langle V, E \rangle$ bằng đúng m , trong đó m là số cạnh của DT.
- Tổng các phần tử của hàng u hoặc cột u của ma trận kề biểu diễn DT vô hướng $G = \langle V, E \rangle$ là bậc của đỉnh u ($\deg(u)$).
- Tổng các phần tử của hàng u của ma trận kề biểu diễn DT có hướng $G = \langle V, E \rangle$ là bán bậc ra của đỉnh u ($\deg^+(u)$).
- Tổng các phần tử của cột u của ma trận kề biểu diễn DT có hướng $G = \langle V, E \rangle$ là bán bậc vào của đỉnh u ($\deg^-(u)$).

Ưu điểm của ma trận kề:

- Đơn giản để cài đặt trên máy tính bằng cách sử dụng một mảng hai chiều.
- Dễ dàng kiểm tra được hai đỉnh u, v có kề với nhau hay không bằng đúng một phép so sánh ($a[u][v] \neq 0$).

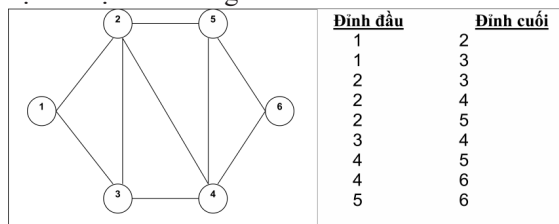
Nhược điểm của ma trận kề:

- Lãng phí bộ nhớ: bất kể số cạnh nhiều hay ít ta cần n^2 đơn vị bộ nhớ để biểu diễn.

- Không thể biểu diễn được với các ĐT có số đỉnh lớn.
- Để xem xét đỉnh đỉnh u có những đỉnh kề nào cần mất n phép so sánh kể cả đỉnh u là đỉnh cô lập hoặc đỉnh treo.

2.5. Biểu diễn ĐT bằng danh sách cạnh

PP biểu diễn đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ bằng cách liệt kê tất cả các cạnh của nó được gọi là PP biểu diễn bằng danh sách cạnh. Đối với ĐT có hướng ta liệt kê các cung tương ứng. Đối với ĐT vô hướng ta chỉ cần liệt kê các cạnh $(u, v) \in E$ mà không cần liệt kê các cạnh $(v, u) \in E$. Ví dụ về biểu diễn ĐT bằng danh sách cạnh được cho trong.



Tính chất của danh sách cạnh:

- Đỉnh đầu luôn nhỏ hơn đỉnh cuối của mỗi cạnh đối với ĐT vô hướng.
- Đỉnh đầu không phải lúc nào cũng nhỏ hơn đỉnh cuối của mỗi cạnh đối với ĐT có hướng.
- Số các số có giá trị u thuộc cả tập đỉnh đầu và tập đỉnh cuối các cạnh là bậc của đỉnh u đối với ĐT vô hướng.
- Số các số có giá trị u thuộc cả tập đỉnh đầu các cạnh là bán bậc ra của đỉnh u đối với ĐT có hướng.
- Số các số có giá trị u thuộc cả tập đỉnh cuối là bán bậc vào của đỉnh u đối với ĐT có hướng.

Ưu điểm của danh sách cạnh:

- Trong trường hợp ĐT thưa ($m < 6n$), biểu diễn bằng danh sách cạnh tiết kiệm được không gian nhớ.
- Thuận lợi cho một số thuật toán chỉ quan tâm đến các cạnh của ĐT.

Nhược điểm của danh sách cạnh: Khi cần duyệt các đỉnh kề với đỉnh u bắt buộc phải duyệt tất cả các cạnh của ĐT. Điều này làm cho thuật toán có chi phí tính toán cao.

2.6. Biểu diễn ĐT bằng danh sách kề dựa vào danh sách liên kết

Để biểu diễn đồ thị $G = \langle V, E \rangle$ bằng danh sách kề ta cần phải tạo nên một mảng, mỗi phần tử của mảng là một danh sách liên kết. Mỗi danh sách liên kết lưu trữ danh sách kề của đỉnh tương ứng. Chương trình dưới đây cài đặt Ô biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề với khuôn dạng dữ liệu trong file dothi.in theo khuôn dạng:

Dòng đầu tiên ghi lại hai số N, M tương ứng với số đỉnh và số cạnh của ĐT. Hai số được viết cách nhau một vài khoảng trống.

M dòng kế tiếp mỗi dòng ghi lại một cạnh của ĐT. Đỉnh đầu và đỉnh cuối mỗi được viết cách nhau

một vài khoảng rỗng.

Tìm kiếm theo chiều sâu (DFS) là một thuật toán để duyệt qua hoặc tìm kiếm cấu trúc dữ liệu dạng cây hoặc ĐT. Thuật toán bắt đầu tại nút gốc (chọn một số nút tùy ý làm nút gốc trong trường hợp đồ thị) và kiểm tra từng nhánh càng xa càng tốt trước khi quay lui.

Kết quả của một DFS là một cây bao trùm (spanning tree). Cây khung (spanning tree) là một đồ thị không có vòng lặp. Để thực hiện duyệt theo DFS, chúng ta cần sử dụng cấu trúc dữ liệu ngăn xếp có kích thước tối đa bằng tổng số đỉnh trong biểu đồ

Với thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu, đỉnh thăm càng muộn sẽ trở thành đỉnh sớm được duyệt xong. Đó là kết quả tất yếu vì các đỉnh thăm được nạp vào stack trong thủ tục đệ quy. Khác với thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu, thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng thay thế việc sử dụng stack bằng hàng đợi (queue). Trong thủ tục này, đỉnh được nạp vào hàng đợi đầu tiên là u , các đỉnh kề với u là $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ được nạp vào hàng đợi nếu như nó chưa được xét đến. Quá trình duyệt tiếp theo được bắt đầu từ các đỉnh còn có mặt trong hàng đợi.

Để ghi nhận trạng thái duyệt các đỉnh của ĐT, ta cũng vẫn sử dụng mảng chuaxet $[]$ gồm n phần tử thiết lập giá trị ban đầu là TRUE. Nếu đỉnh u của ĐT đã được duyệt, giá trị chuaxet $[u]$ sẽ nhận giá trị FALSE.

Duyệt tất cả các đỉnh của ĐT. Duyệt tất cả các thành phần liên thông của ĐT. Tìm đường đi từ đỉnh s đến đỉnh t trên ĐT. Duyệt các đỉnh trụ trên ĐT vô hướng. Duyệt các cạnh cầu trên ĐT vô hướng. Định chiều ĐT vô hướng. Duyệt các đỉnh rẽ nhánh của cặp đỉnh s, t . Xác định tính liên thông mạnh trên ĐT có hướng. Xây dựng cây khung trên ĐT vô hướng. Tìm chu trình trên ĐT vô hướng, có hướng. Định chiều ĐT...

3. Kết luận

Có nhiều thuật toán trên ĐT được xây dựng để duyệt tất cả các đỉnh của ĐT sao cho mỗi đỉnh được viếng thăm đúng một lần. Những thuật toán như vậy được gọi là thuật toán tìm kiếm trên ĐT. Đó là duyệt theo chiều sâu DFS (Depth First Search) và duyệt theo chiều rộng BFS (Breath First Search). Trên cơ sở của hai phép duyệt cơ bản, ta có thể áp dụng chúng để giải quyết một số bài toán quan trọng của lý thuyết ĐT.

Tài liệu tham khảo

- [1]. N. Đ. Nghĩa (2022), *Cấu trúc dữ liệu và thuật toán*, NXBĐH Bách khoa Hà Nội.
- [2]. Đ. X. T. N. T. H. P. X. L. Đỗ Trung Kiên (2022), *Cấu trúc dữ liệu và giải thuật*, NXB ĐHSP Hà Nội.
- [3]. Cormen, T. H. (2022). *Introduction to algorithms*. MIT press.