

NGUYỄN TRẦN MINH QUỜI

**Tuyển tập 45 bộ đề
ôn luyện thi Đại học môn
TOÁN**

Ôn luyện thi tốt nghiệp THPT
và tuyển sinh Đại học & Cao đẳng



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Nhà giáo ưu tú TRẦN MINH QUỠI

TUYỂN TẬP

45 BỘ ĐỀ

ÔN LUYỆN THI ĐẠI HỌC

Môn

TOÁN

ÔN LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPT
VÀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

LỜI NÓI ĐẦU

Đây là quyển sách hướng dẫn ôn tập, nội dung được biên soạn dựa vào chương trình đang hiện hành đối với môn Toán của Bộ giáo dục và Đào tạo.

Chúng tôi tuyển chọn các bài tập phù hợp với chương trình với 45 bộ đề tổng hợp môn Toán mỗi đề tổng hợp gồm có 5 câu hỏi, kiến thức bao quát trong ba năm học bậc Trung học phổ thông.

Về hình thức và nội dung, mỗi đề tổng hợp có cấu trúc như một đề thi tốt nghiệp Trung học phổ thông và tuyển sinh vào Đại học.

Chúng tôi hy vọng rằng, nội dung được trình bày trong quyển sách này giúp học sinh ôn tập đúng những kiến thức trọng tâm trong ba năm học, giải được các bài tập khó và đạt hiệu quả tốt trong các kì thi tuyển sinh sắp tới.

Chúc các em thành công trong kì thi sắp tới.

Tác giả

ĐỀ 1

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m - 3)x + 1$.

1. Xác định giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$
3. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó hợp với trục hoành một góc 45° .

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sin^2 2x$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

$$y = \sqrt{4\sin^2 x - 4\sin x + 2} + \sqrt{17 + 8\sin x - 4\cos^2 x}$$

Câu 3.

1. Tìm hai hằng số a và b sao cho $\frac{3x+1}{x^2-4x+3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$.

Từ đó tính $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+3} dx$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:
 $y = \sin x, y = \cos x \ (0 \leq x \leq 2\pi)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(1; 3; 0)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(1; 1; 2)$, $D(-1; 1; 0)$.

1. Tứ diện ABCD có đặc điểm gì?
2. Viết phương trình của mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

Câu 5.

1. Cho phương trình $e^{x^2+2mx+2} - e^{2x^2-4mx-2+3m} = x^2 + 2mx + m$.
Xác định m để phương trình có nghiệm.
2. Trong không gian, cho đường thẳng Δ và hai điểm A, B sao cho đường thẳng AB và Δ chéo nhau. Một điểm M di động trên Δ , xác định vị trí của M để:
a) $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.
b) $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Câu 1.

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 4m - 3$.

Điều kiện để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Biệt thức $\Delta' = m^2 - 4m + 3, \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 3$.

m	-x	1	3	+x		
Δ'		+	0	-	0	+

- Nếu $1 \leq m \leq 3$ thì $\Delta' \leq 0$, suy ra $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Như thế hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên cũng đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Nếu $m < 1$ hoặc $m > 3$ thì $\Delta' > 0$, suy ra phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

x	$-x$	x_1	x_2	$+x$		
y'		+	0	-	0	+

Trong trường hợp này, $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ khi:

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2m < 0 \\ P = 4m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

Tóm lại, nếu $m \in [1; 3]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

2. Khi $m = 1$ phương trình của hàm số trở thành $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$.

* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

* Sự biến thiên:

• $y' = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$.

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

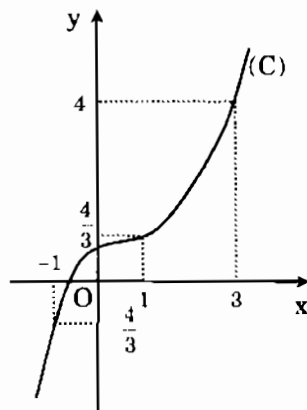
• Bảng biến thiên:

x	-x	+x
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

* Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$, điểm

$U\left(1; \frac{4}{3}\right)$ là tâm đối xứng của đồ thị.



3. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) hợp với trục hoành một góc 45° , tiếp điểm là $M_0(x_0; y_0)$.

Suy ra Δ có hệ số góc k định bởi: $|k| = \tan 45^\circ \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Mà $k = y'(x_0) = x_0^2 - 2x_0 + 1$, nên:

• Nếu $k = 1$ ta được phương trình:

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$ thì $M_0(0; 1)$, phương trình của Δ là $y = x + 1$.

Với $x_0 = 2$ thì $M_0\left(2; \frac{4}{3}\right)$, phương trình của Δ là $y = x - \frac{4}{3}$.

• Nếu $k = -1$ ta được phương trình: $x_0^2 - 2x_0 + 1 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 2 = 0$.
(vô nghiệm).

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn bài toán với phương trình là: $y = x + 1$ và

$$y = x - \frac{4}{3}.$$

Câu 2.

$$1. \cos^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2 3\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin^2 2x \quad (1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^2 3x = 2\sin^2 2x \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1 - \cos 4x.$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x + \cos 2x = 2\cos 4x \Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x - 2\cos 4x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x (\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \text{ hoặc } \cos 2x = 1.$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hoặc } 2x = n2\pi \text{ với } k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \text{ hoặc } x = n\pi.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ hoặc $x = n\pi$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).

2. Phương trình của hàm số viết lại:

$$y = \sqrt{(2\sin x - 1)^2 + 1^2} + \sqrt{(2\sin x + 2)^2 + 3^2}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai vectơ $\vec{u} = (2\sin x - 1; 1)$ và

$$\vec{v} = (-2\sin x - 2; 3).$$

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (-3; 4)$.

Suy ra $y = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$.

Mặt khác với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 5$.

Do đó $y \geq 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, tức là:

$$\frac{2\sin x - 1}{-2\sin x - 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 6\sin x - 3 = -2\sin x - 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{8}.$$

Vậy $\min y = 5$ khi $x = \arcsin \frac{1}{8} + k2\pi$ hoặc $x = \pi - \arcsin \frac{1}{8} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 3.

$$1. \frac{3x+1}{x^2-4x+3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{a(x-3)+b(x-1)}{(x-1)(x-3)}.$$

Suy ra $3x+1 \equiv (a+b)x - 3a - b$, với mọi x .

$$\text{Do đó } \begin{cases} a+b=3 \\ -3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$$

$$\text{Ta được } \frac{3x+1}{x^2-4x+3} = \frac{-2}{x-1} + \frac{5}{x-3} \quad (*)$$

Từ (*) ta có:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+3} dx = -2 \int \frac{1}{x-1} dx + 5 \int \frac{1}{x-3} dx = -2 \ln|x-1| + 5 \ln|x-3| + C$$

2. Gọi $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos x$.

$$f(x) - g(x) = \sin x - \cos x.$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{4}.$$

Diện tích hình phẳng:

$$S = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right| = \left| \left(-\cos x - \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \right| = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } S = 2\sqrt{2} \text{ (đvdt).}$$

Câu 4. A(1; 3; 0), B(-1; 3; 2), C(1; 1; 2), D(-1; 1; 0).

1. Ta dễ dàng tính được: $AB = AC = AD = BC = CD = DB = 2\sqrt{2}$.

Vậy ABCD là một tứ diện đều.

2. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, ta được I(0; 3; 1), J(0; 1; 1).

Lại gọi G là trung điểm của IJ, ta được G(0; 2; 1).

Vì ABCD là một tứ diện đều nên G(0; 2; 1) là tâm của mặt cầu nội tiếp của tứ diện ABCD.

Ta có: $\vec{AB} = (-2; 0; 2)$, $\vec{AC} = (0; -2; 2)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC): $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (4; 4; 4)$, cùng phương với vectơ $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

Phương trình của mặt phẳng (ABC):

$$1.(x - 1) + 1.(y - 3) + 1.(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 4 = 0.$$

Bán kính của mặt cầu nội tiếp ABCD:

$$r = d(G, (ABC)) = \frac{|0 + 2 + 1 - 4|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Phương trình của mặt cầu nội tiếp ABCD là:

$$x^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{3}.$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $e^{x^2 + 2mx - 2} - e^{2x^2 + 4mx - 2 + m} = x^2 + 2mx + m$.

Tập xác định của phương trình $D = \mathbb{R}$.

Đặt $u = x^2 + 2mx + 2$, $v = 2x^2 + 4mx + 2 + m$ thì $v - u = x^2 + 2mx + m$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$e^u - e^v = v - u \Leftrightarrow e^u + u = e^v + v$$

Xét hàm số $f(x) = e^x + x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Như vậy: $f(u) = e^u + u$ và $f(v) = e^v + v$.

Ta có: $f'(x) = e^x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó:

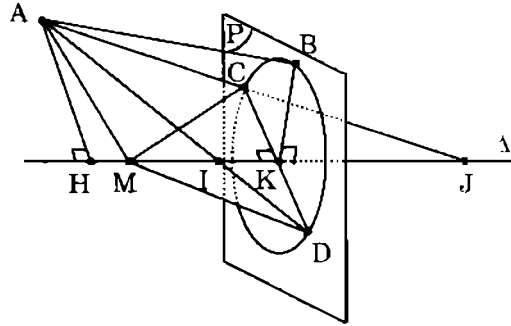
$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' = m^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1$$

Vậy nếu $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

2. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên Δ . Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với Δ tại K. Trong (P) dựng đường tròn (T) tâm K bán kính KB thì Δ là trục đối xứng của đường tròn (T). Như thế với mọi điểm $M \in \Delta$ và mọi điểm $N \in (T)$ ta đều có $MN = MB$.



Gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi A và Δ . Mặt phẳng (Q) cắt (T) theo đường kính CD, trong (Q) ta có thể giả sử hai điểm A và C nằm cùng một phía đối với Δ . Như thế khi điểm M di động trên Δ ta luôn có $MB = MC = MD$.

- a) Vị trí của M để $MA + MB$ nhỏ nhất:

Ta có: $MA + MB = MA + MD \geq AD$ (a).

Bất đẳng thức (a) thành đẳng thức khi và chỉ khi M trùng với điểm I, với I là giao điểm của Δ và đoạn thẳng AD.

Để ý rằng, trong mặt phẳng (Q) ta có:

$$KD \parallel AH \Rightarrow \frac{IH}{IK} = \frac{AH}{KD} = \frac{AH}{BK}.$$

Như thế I là điểm chia đoạn thẳng HK theo tỉ số: $k = -\frac{AH}{BK}$.

Tóm lại: Khi điểm M trùng với điểm I thì $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất và ta được: $\min(MA + MB) = AD$.

- b) Vị trí của M để $|MA - MB|$ lớn nhất:

Ta có: $|MA - MB| = |MA - MC| \leq AC$ (b).

Bất đẳng thức (b) thành đẳng thức khi và chỉ khi M trùng với điểm J, với J là giao điểm của Δ và đường thẳng AC. Trong mặt phẳng (Q) ta cũng có:

$$CK \parallel AH \Rightarrow \frac{JH}{JK} = \frac{AH}{CK} = \frac{AH}{BK}.$$

Như thế J là điểm chia đoạn thẳng HK theo tỉ số: $k' = \frac{AH}{BK}$.

Vậy: Khi điểm M trùng với H thì $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất và ta được: $\max(|MA - MB|) = AC$.

Chú ý rằng khi $AH = BK$ thì $AC \parallel \Delta$ nên điểm J không xác định, trong trường hợp này không tồn tại điểm M nào trên Δ để $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐỀ 2

Câu 1.

- Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Xác định phương trình của hàm số, biết rằng đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị là $A(1; -1)$ và $B(-1; 3)$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với các giá trị a, b, c, d vừa tìm được.
- Chứng minh rằng nếu hàm số có hai cực trị sao cho giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu thì phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 2.

- Giải phương trình $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$ (1).
- Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{9x^2 - 30x + 29}$$

Câu 3.

- Tìm các hằng số a, b, c sao cho $\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$.

Từ đó tính $\int \frac{1}{x(x^2 - 1)} dx$.

- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

$$y = x^3 - 3x, y = -3x + 1, x = 0, x = 2.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(0; 2; 3)$, $C(1; 0; 3)$.

- Chứng minh rằng tứ diện OABC có các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi một.
- Viết phương trình của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

Câu 5.

- Giải phương trình $2x - \lg(5^{2x} + x - 2) = \lg 4^x$.
- Cho hai tia Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N thay đổi lần lượt trên Ax và By sao cho $AM = BN$ ($M \neq A, N \neq B$).
 a) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
 b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN, tìm quỹ tích điểm N.

Giải

Câu 1.

- * Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(-1) = 3 \\ f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = -1 \\ -a + b - c + d = 3 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$

Ta được $y = x^3 - 3x + 1$. Kiểm tra lại ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Vậy phương trình của hàm số là $y = x^3 - 3x + 1$.

* Khảo sát hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (đọc giả tự khảo sát).

2. Ta xét bài toán trong trường hợp $a > 0$, trường hợp $a < 0$ được chứng minh tương tự.

Giả sử hàm số đạt cực đại tại điểm x_1 và đạt cực tiểu tại điểm x_2 , giá trị cực đại và cực tiểu tương ứng là y_1 và y_2 .

Vì $a > 0$ nên hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			y_1 CĐ		y_2 CT		$+\infty$

$-\infty \xrightarrow{\quad} y_1 \xrightarrow{\quad} y_2 \xrightarrow{\quad} +\infty$

Trong trường hợp này ta phải có $x_1 < x_2$, $y_1 > 0$ và $y_2 < 0$. (vì y_1 và y_2 trái dấu).

- $f(x_1) = y_1 > 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists \alpha < 0$ với $|\alpha|$ đủ lớn sao cho $\alpha < x_1$ và $f(\alpha) < 0$.

Suy ra $f(x_1).f(\alpha) < 0 \Rightarrow \exists c_1 \in (\alpha; x_1)$ sao cho $f(c_1) = 0$.

- $f(x_1).f(x_2) = y_1.y_2 < 0 \Rightarrow \exists c_2 \in (x_1; x_2)$ sao cho $f(c_2) = 0$.

- $f(x_2) = y_2 < 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists \beta > 0$ với β đủ lớn sao cho $\beta > x_2$ và $f(\beta) > 0$.

Suy ra $f(x_2).f(\beta) < 0 \Rightarrow \exists c_3 \in (x_2; \beta)$ sao cho $f(c_3) = 0$.

Như vậy c_1, c_2, c_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$.

Mặt khác $f(x) = 0$ là phương trình bậc ba nên có nhiều nhất ba nghiệm, do vậy phương trình này có đúng ba nghiệm phân biệt là c_1, c_2, c_3 .

Vậy phương trình: $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Câu 2.

1. Xét phương trình $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

2. Xét hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{9x^2 - 30x + 29}$.

Phương trình của hàm số viết lại:

$$y = \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{(2x - 1)^2 + 1^2} + \sqrt{(3x - 5)^2 + 2^2}.$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét ba vectơ.

$$\vec{u} = (x; 1), \vec{v} = (2x - 1; 1), \vec{w} = (-3x + 5; 2).$$

Ta có $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (4; 4)$.

Suy ra: $y = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$ và $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = 4\sqrt{2}$.

Mặt khác với ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ta luôn có:

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = 4\sqrt{2}.$$

Do đó $y \geq 4\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng hướng,

$$\text{tức là: } \begin{cases} \frac{2x-1}{x} = \frac{1}{x} \\ \frac{-3x+5}{x} = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = x \\ -3x+5 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $\min_{x \in \mathbb{R}} y = 4\sqrt{2}$ khi $x = 1$.

Câu 3.

1. Ta có:

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a(x^2-1) + bx(x+1) + cx(x-1)}{x(x^2-1)}.$$

Suy ra: $a(x^2-1) + bx(x+1) + cx(x-1) \equiv 1 \Leftrightarrow (a+b+c)x^2 + (b-c)x - a \equiv 1$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do vậy } \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}.$$

$$\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx = -\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx.$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2-x| + C.$$

2. Gọi $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = -3x + 1$.

Ta có $f(x) - g(x) = x^3 - 1$.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó diện tích của hình phẳng là:

$$S = \int_0^2 |x^3 - 1| dx$$

$$S = \left| \int_0^1 (x^3 - 1) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 1) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x \right]_1^2 \right|$$

$$\text{Vậy } S = \frac{7}{2} \text{ (đvdt).}$$

Câu 4. Theo giả thiết $A(1; 2; 0), B(0; 2; 3), C(1; 0; 3)$.

$$1. OA = BC = \sqrt{5}, OB = AC = \sqrt{13}, OC = AB = \sqrt{10}.$$

Vậy tứ diện OABC có các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi một.

phẳng (BAs) là một mặt phẳng cố định.

Ta dễ dàng chứng minh được: $(MNP) // (BAs)$.

Mà $MN \subset (MNP)$ nên $MN // (BAs)$.

Vậy: Đường thẳng MN luôn song song với mặt phẳng cố định.

b) Gọi J là trung điểm MP thì $IJ // NP$ và $IJ = \frac{NP}{2}$. Suy ra $IJ // AB$ và $IJ = \frac{AB}{2}$.

Trong mặt phẳng (Axy') , tam giác AMP cân tại A nên quỹ tích của J là phân giác At (loại điểm A) của góc $\widehat{xAy'}$.

Ta có: $\vec{JI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$. Do đó phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ biến J thành I.

Vậy: Quỹ tích của I là tia Oz (loại điểm O) ảnh của At trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AB}$. Tia Oz đi qua trung điểm O của AB song song và cùng hướng với tia At.

ĐỀ 3

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ (C_m).

- Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với $m = 1$.
- Chứng minh rằng trên đồ thị (C) tồn tại vô số cặp điểm mà tiếp tuyến tại các cặp điểm đó song song với nhau.

Câu 2.

- Giải phương trình $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + (\sqrt{2} - 2)\sin x + \sqrt{2} - 2 = 0$ (1).
- Cho x và y là hai số thực bất kì, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 10y + 38}.$$

Câu 3.

- Tính $\int (\sin^5 x + \sin^3 x + \sin x) dx$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: $y = x^3 + x$ và $y = 5x$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1; 3; 1)$, $B(-1; 3; 3)$, $C(1; 1; 3)$.

- Kiểm chứng rằng tam giác ABC đều, tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là một tứ diện đều.

Câu 5.

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2^x \cdot 4^{y-\frac{1}{2}} = 64 \end{cases}.$$

2. Cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Đoạn thẳng AB có độ dài a trượt trên d và đoạn thẳng CD có độ dài b trượt trên d' . Chứng minh rằng khối tứ diện $ABCD$ có thể tích không đổi.

Giải

Câu 1.

1. Giả sử đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 thì x_0 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^3 - 3(m+3)x_0^2 + 18mx_0 - 8 = 0 & (1) \\ 6x_0^2 - 6(m+3)x_0 + 18m = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow x_0^2 - (m+3)x_0 + 3m = 0$.

Phương trình trên có hai nghiệm $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = m$.

- Thế $x_0 = 3$ vào (1) ta được: $27m - 35 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{35}{27}$.

- Thế $x_0 = m$ vào (1) ta được:

$$(m-1)(m^2 - 8m - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy có bốn giá trị của m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành là:

$$m = \frac{35}{27}, m = 1, m = 4 \pm 2\sqrt{6}$$

2. Khi $m = 1$ phương trình của hàm số trở thành $y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 8$.

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 6(x^2 - 4x + 3)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

$y' > 0$ khi $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$.

$y' < 0$ khi $x \in (1; 3)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CD} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -8$.

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty$	0	-8	$+\infty$

* Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; -8)$, cắt trục hoành tại hai điểm $(1; 0)$, $(4; 0)$ và có tâm đối xứng là điểm $(2; -4)$.

3. Ta có $f'(x) = 6(x^2 - 4x + 3)$.

Trên đồ thị (C) lấy hai điểm bất kì

$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), (x_1 \neq x_2)$.

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_1

là $k_1 = f'(x_1) = 6(x_1^2 - 4x_1 + 3)$.

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_2

là $k_2 = f'(x_2) = 6(x_2^2 - 4x_2 + 3)$.

Hai tiếp tuyến của (C) tại M_1 và M_2

song song với nhau khi và chỉ khi:

$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow 6(x_1^2 - 4x_1 + 3) = 6(x_2^2 - 4x_2 + 3).$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 4 = 0 \text{ (vì } x_1 \neq x_2).$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 4 - x_1.$$

Do vậy hai điểm $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ thuộc (C) với $x_2 = 4 - x_1$ thì các tiếp tuyến của (C) tại M_1 và M_2 song song với nhau. Vì $x_1 \in \mathbb{R}$ nên tồn tại vô số cặp điểm với các tiếp tuyến của (C) tại M_1 và M_2 song song với nhau.

Câu 2.

1. Xét phương trình $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + (\sqrt{2} - 2)\sin x + \sqrt{2} - 2 = 0$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \text{ hoặc } \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\bullet \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$\bullet \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{4} + m2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{8} + m\pi.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{8} + m\pi (k, m \in \mathbb{Z})$.

2. Xét biểu thức:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 10y + 38}$$

Biểu thức A có thể viết.

$$A = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + 1^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2 + 2^2}$$

Trong không gian với hệ Oxyz, ta xét hai vectơ

$$\vec{u} = (x; y+1; 1), \vec{v} = (-x-3; -y+5; 2)$$

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (-3; 6; 3)$.

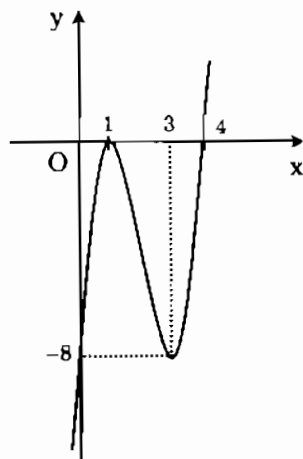
Suy ra $A = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $|\vec{u} + \vec{v}| = 3\sqrt{6}$.

Mặt khác với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 5$.

Do đó $A \geq 3\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng, tức là:

$$\frac{x}{-x-3} = \frac{y+1}{-y+5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $\min A = 3\sqrt{6}$ khi $x = -1$ và $y = 1$.



Câu 3.

1. Gọi $I = \int (\sin^5 x + \sin^3 x + \sin x) dx$

$$I = \int [(1 - \cos^2 x)^2 + (1 - \cos^2 x) + 1] \sin x dx$$

$$I = \int (\cos^4 x - 3\cos^2 x + 3) \sin x dx$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$I = - \int (t^4 - 3t^2 + 3) dt = -\frac{t^5}{5} + t^3 - 3t + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \cos^3 x - 3\cos x + C$$

2. Gọi $f(x) = x^3 + x$ và $g(x) = 5x$.

Ta có $f(x) - g(x) = x(x^2 - 4)$.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -2).$$

Do đó diện tích của hình phẳng là:

$$S = \int_{-2}^2 |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx.$$

$$S = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \right| = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = 8.$$

Vậy $S = 8$ (đvdt).

Câu 4. Xét tam giác ABC với $A(1; 3; 1)$, $B(-1; 3; 3)$, $C(1; 1; 3)$.

1. $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}$, do đó ABC là một tam giác đều.

Điểm $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC khi và

chỉ khi: $\begin{cases} IA = IB = IC \\ I \in mp(ABC) \end{cases} \quad (1).$

• $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 3)^2 + (c - 1)^2 = (a + 1)^2 + (b - 3)^2 + (c - 3)^2.$$

$$\Leftrightarrow a - c + 2 = 0.$$

• $IA = IC \Leftrightarrow IA^2 = IC^2$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 3)^2 + (c - 1)^2 = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 3)^2.$$

$$\Leftrightarrow b - c = 0.$$

• $\vec{AB} = (-2; 0; 2)$, $\vec{AC} = (0; -2; 2)$. Suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC):

$$\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (4; 4; 4), \text{ cùng phương với vectơ } \vec{u} = (1; 1; 1).$$

Phương trình của mặt phẳng (ABC):

$$1.(x - 1) + 1.(y - 3) + 1.(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 5 = 0.$$

Do đó $I(a; b; c) \in \text{mặt phẳng (ABC)} \Leftrightarrow a + b + c - 5 = 0.$

$$\text{Như vậy: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} a - c + 2 = 0 \\ b - c = 0 \\ a + b + c - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

2. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I thì Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó nếu ABCD là tứ diện đều thì $D \in \Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên có phương

$$\text{trình tham số là: } \begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{7}{3} + t \\ z = \frac{7}{3} + t \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{1}{3} + t; \frac{7}{3} + t; \frac{7}{3} + t\right).$$

Ta phải có điều kiện: $AD = AB \Leftrightarrow AD^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} + t - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{3} + t - 3\right)^2 = 8 \Leftrightarrow 9t^2 = 16 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{4}{3}.$$

Suy ra $D\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}; \frac{11}{3}\right)$ hoặc $D(-1; 1; 1)$.

Câu 5.

1. Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2^x \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} = 64 \end{cases}$. Ta có:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2^x \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2^{x+2y+1} = 2^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $x = 1$ và $y = 2$.

2. Gọi (P) là mặt phẳng qua d và song song với d', thì (P) là mặt phẳng cố định.

Qua A kẻ đường thẳng Δ song song với d', thì Δ nằm trong (P).

Từ D dựng đường thẳng song song với AC cắt Δ tại điểm E.

Ta thấy tứ giác ACDE là một hình bình hành, do đó $V_{ABCD} = V_{ABDE}$.

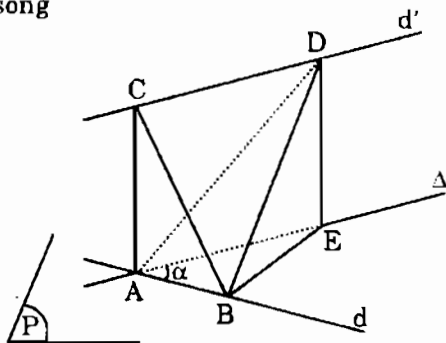
(Vì hai khối B.ACD và B.ADE có hai đáy là hai tam giác ACD và DEA bằng nhau, có cùng chiều cao là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (d', Δ)).

Gọi α là góc tạo bởi d và d'. Ta có:

$$V_{ABDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABE} \cdot h \text{ với } h = d(D, (P)).$$

Mà $S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AE \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot ab \sin \alpha$ (không đổi). Ngoài ra, do $d' \parallel (P)$ nên khoảng cách từ h từ D đến (P) không đổi. Suy ra V_{ABDE} không đổi.

Vậy V_{ABDE} không đổi.



ĐỀ 4

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - mx + m - 2$, gọi đồ thị là (C_m) .

- Viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của (C_m) với trục tung. Chứng minh rằng khi m thay đổi, tiếp tuyến này luôn đi qua một điểm cố định.
- Xác định m để tiếp tuyến nói trong câu 1) chắn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với $m = -1$.

Câu 2.

- Giải phương trình $2\cos^3 x - \sin^2 x - 5\cos x + 3 = 0$.
- Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện.

$$x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \frac{4}{3}$$

Chứng minh rằng: $x + y + z \leq 4$.

Câu 3.

- Tính $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$.

- Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$, tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(-2; 1)$ và trục hoành.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; -1)$, $B(0; 2; 2)$, $C(1; 0; 2)$.

- Viết phương trình của mặt phẳng (ABC) .
- Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 5.

- Xác định các giá trị của m để bất phương trình sau vô nghiệm:

$$4^x - (m-1)2^{x+1} + 4m + 1 < 0$$

- Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp$ mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC .
 - Một mặt phẳng (α) đi qua AM và song song với BD chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích của mỗi phần đó.
 - Tính góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải

Câu 1.

- Đồ thị (C_m) cắt trục tung tại điểm $A(0; m-2)$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C_m) tại A .

Ta có $y' = 3x^2 - m$, suy ra $y'(0) = -m$.

Phương trình của tiếp tuyến Δ là $y = -mx + m - 2$.

Dễ thấy tiếp tuyến này luôn đi qua điểm cố định $I(1; -2)$.

2. Tiếp tuyến Δ cắt trục tung tại điểm $A(0; m - 2)$ và cắt trục hoành tại điểm $B\left(\frac{m-2}{m}; 0\right)$ ($m \neq 0$).

Tam giác OAB là tam giác chắn bởi Δ với hai trục tọa độ.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |m - 2| \cdot \left| \frac{m - 2}{m} \right| = \frac{(m - 2)^2}{2|m|}.$$

Theo giả thiết ta có phương trình.

$$S_{OAB} = 4 \Leftrightarrow \frac{(m - 2)^2}{2|m|} = 4 \Leftrightarrow (m - 2)^2 = 4|m| \quad (*).$$

$$\bullet m > 0 : (*) \Rightarrow (m - 2)^2 = 4m \Leftrightarrow m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 + 2\sqrt{3} \\ m = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\bullet m < 0 : (*) \Rightarrow (m - 2)^2 = -4m \Leftrightarrow m^2 + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy các giá trị của m cần tìm là $m = 4 + 2\sqrt{2}$ hoặc $m = 4 - 2\sqrt{2}$.

3. Khi $m = -1$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 + x - 3$.

* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

* Sự biến thiên:

$$\bullet y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số đồng biến trên toàn tập xác định $\mathbb{R}$.

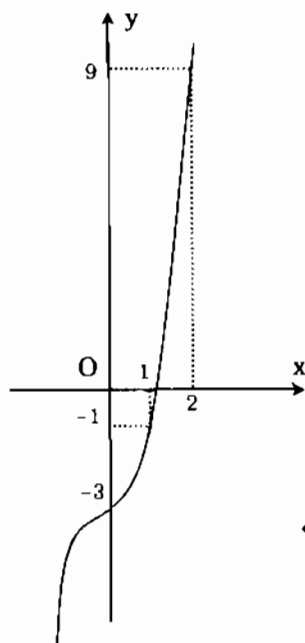
$$\bullet \text{Giới hạn: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

* Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $U(0; -3)$, điểm U cũng là tâm đối xứng của đồ thị.



Câu 2.

1. Xét phương trình $2\cos^3 x - \sin^2 x - 5\cos x + 3 = 0$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 2)(2\cos^2 x - 3\cos x + 1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ hoặc } \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

2. Ta có $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$.

$$\text{Hay } (x + y + z)^2 - 3(x + y + z) \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x + y + z).$$

$$\text{Hay } (x + y + z)^2 - (x + y + z) \leq 3[x(x - 1) + y(y - 1) + z(z - 1)] \leq 3 \cdot \frac{4}{3}.$$

$$\text{Suy ra } (x + y + z)^2 - 3(x + y + z) \leq 4 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 3(x + y + z) - 4 \leq 0.$$

$$\text{Đặt } t = x + y + z \geq 0, \text{ ta được bất đẳng thức } t^2 - 3t - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 4.$$

Kết hợp với $t \geq 0$ ta được $0 \leq t \leq 4$.

$$\text{Vậy } x + y + z \leq 4. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = y = z = \frac{4}{3}.$$

Câu 3.

1. Đặt $t = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 - 2t + 1 \Rightarrow dx = 2(t - 1)dt$.

$$\text{Ta được } \int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{(t^2 - 2t + 1)(t - 1)dt}{t} = 2 \int \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t} dt.$$

$$= 2 \int \left(t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t} \right) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 3t - \ln|t| \right) + C.$$

$$= \frac{1}{3}(1 + \sqrt{x})(2x - 5\sqrt{x} + 11) - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C.$$

2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$,

tiếp tuyến của (C) tại điểm A(-2; 1) và trục hoành.

$$\text{Gọi } f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, \text{ ta có } f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Suy ra } f'(-2) = -\frac{1}{3}.$$

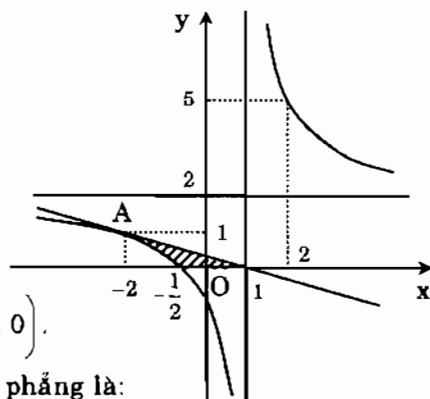
Phương trình tiếp tuyến của (C)

tại điểm A(-2; 1):

$$y = -\frac{1}{3}(x + 2) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Dựa vào đồ thị ta có diện tích của hình phẳng là:



$$S = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x-1} dx.$$

$$S = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 + \frac{3}{x-1} \right) dx.$$

$$S = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} \right) \Big|_{-2}^{\frac{1}{2}} - (2x + 3\ln|x-1|) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{2}(2\ln 2 - 1).$$

$$\text{Vậy } S = \frac{3}{2}(2\ln 2 - 1) \text{ (đvdt)}.$$

Câu 4. Theo giả thiết $A(1; 2; -1)$, $B(0; 2; 2)$, $C(1; 0; 2)$.

1. $\vec{AB} = (-1; 0; 3)$, $\vec{AC} = (0; -2; 3)$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC):
 $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (6; 3; 2)$

Phương trình của mặt phẳng (ABC):

$$6(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 10 = 0.$$

2. Điểm $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC khi và

$$\text{chỉ khi: } \begin{cases} IA = IB = IC \\ I \in mp(ABC) \end{cases} \quad (1)$$

$$\bullet IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c + 1)^2 = a^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2.$$

$$\Leftrightarrow 2a - 6c + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\bullet IA = IC \Leftrightarrow IA^2 = IC^2$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c + 1)^2 = (a - 1)^2 + b^2 + (c - 2)^2.$$

$$\Leftrightarrow -4b + 6c + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\bullet I \in mp(ABC) \Leftrightarrow 6a + 3b + 2c - 10 = 0 \quad (3).$$

$$\text{Giải hệ (1), (2), (3) ta được: } a = \frac{85}{98}, b = \frac{58}{49}, c = \frac{61}{98}.$$

$$\text{Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là } I\left(\frac{85}{98}; \frac{58}{49}; \frac{61}{98}\right).$$

Câu 5.

1. Xét bất phương trình $4^x - (m - 1)2^{x+1} + 4m + 1 < 0$ (1).

Bài toán tương đương với, xác định giá trị của m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$: $4^x - (m - 1)2^{x+1} + 4m + 1 \geq 0$ (2).

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), bất phương trình (2) trở thành

$$t^2 - 2(m - 1)t + 4m + 1 \geq 0 \quad (3).$$

Gọi $f(t) = t^2 - 2(m - 1)t + 4m + 1$.

Như vậy ta xác định m để $f(t) \geq 0$ với mọi $t > 0$.

Ta có $\Delta' = m^2 - 6m$.

m	$-\infty$		0		6		$+\infty$
Δ'		+	0	-	0	+	

• Nếu $0 \leq m \leq 6$ thì $\Delta' \leq 0$, suy ra $f(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $f(t) \geq 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

• Nếu $m < 0$ hoặc $m > 6$ thì $\Delta' > 0$, khi đó $f(t)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 .

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
$f(t)$		+	0	-	0	+	

$$\text{Do đó: } f(t) < 0, \forall t \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2(m - 1) < 0 \\ P = 4m + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m < 1.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta được $-\frac{1}{4} \leq t < 0$.

Tóm lại: Nếu $-\frac{1}{4} \leq t \leq 6$ thì bất phương trình (2) được nghiệm đúng với mọi x , hay bất phương trình đã cho vô nghiệm.

2. Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ ta có:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}.$$

a) Mặt phẳng (α) song song với BD nên cắt mặt phẳng $(SBD) \Rightarrow BD$ theo giao tuyến $NP \parallel BD$ ($N \in SB$, $P \in SD$). Như thế (α) cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $ANMP$.

Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = AM \cap NP$, dễ thấy ba điểm S, I, O thẳng hàng.

Nhận thấy I là trọng tâm của

$$\Delta SAC \text{ nên } \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Trong } \Delta SBD, NP \parallel BD \Rightarrow \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}.$$

Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.ANMP$ và V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\Delta ACB = \Delta CAD$. Do đó:

$$V_{SACB} = V_{SCAD} = \frac{V}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACB}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{V}{6}.$$

$$\text{Tương tự } V_{S.AMP} = \frac{V}{6}.$$

$$\text{Do đó } V_1 = V_{S.AMN} + V_{S.AMP} = \frac{V}{6} + \frac{V}{6} = \frac{V}{3}.$$

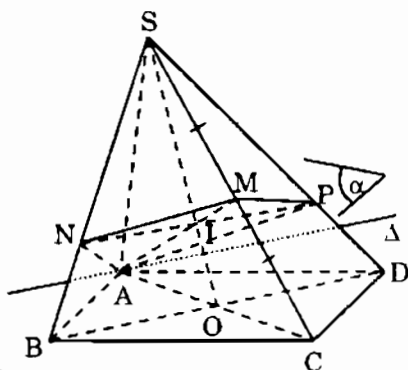
$$\text{Vậy } V_1 = \frac{a^3}{9}, \text{ suy ra } V_2 = \frac{2V}{3} = \frac{2a^3}{9}.$$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng Δ qua A song song với BD và NP . Do $OA \perp BD$ nên $OA \perp \Delta$. Mặt khác MO là đường trung bình của ΔSAC nên $MO \parallel SA$.

Suy ra $MO \perp (ABCD) \Rightarrow MA \perp \Delta$. Do đó góc giữa (α) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{MAO}$.

Từ tam giác MOA vuông tại O , ta có:

$$\tan \widehat{MAO} = \frac{MO}{OA} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } \widehat{MAO} = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



ĐỀ 5

Câu 1. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x + 1$.

1. Khảo sát hàm số đã cho. Gọi đồ thị của hàm số là (C).
2. Trên đường thẳng (D): $y = 3$, hãy chỉ ra các điểm từ đó vẽ được với (L) ba tiếp tuyến phân biệt.
3. Trên đường thẳng (D): $y = 3$, hãy chỉ ra các điểm từ đó vẽ được với (L) ba tiếp tuyến phân biệt, trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sqrt{2} \tan^3 x - (2\sqrt{3} + 1)\tan^2 x + (\sqrt{3} + 2)\tan x - 1 = 0$ (1).
2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz \geq x + y + z + 2$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $x + y + z$.

Câu 3.

1. Tính $\int \tan^4 x dx$.
2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |\ln x|$, $y = 1$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (D) định bởi:

$$(P): x - y + 2z - 2 = 0, (D): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng đường thẳng (D) song song với mặt phẳng (P).
2. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) qua (D) và hợp với (P) một góc 60° .

Câu 5.

1. Giải phương trình $\log_{2008} \frac{4x^2 + 1}{x^6 + x^2 + 3} = x^6 - 3x^2 + 2$.
2. Cho khối bát diện đều ABCDEG cạnh a , với các đường chéo là AC, BD, EG.
 - a) Chứng minh rằng ba đường chéo AC, BD, EG vuông góc với nhau từng đôi một và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
 - b) Tính diện tích của mặt cầu nội tiếp của khối bát diện đã cho theo a .

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số: (độc giải tự giải).
2. Trên đường thẳng (D) lấy điểm $M(m; 3)$ bất kì. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M với hệ số góc k . Phương trình của Δ có dạng:

$$y = k(x - m) + 3 \Leftrightarrow y = kx - km + 3.$$

Điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với (C) là hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = kx - km + 3 & (1) \\ 3x^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) và thu gọn ta được:

$$(x+1)[2x^2 - (3m+2)x + 3m+2] = 0 \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ g(x) = 2x^2 - (3m+2)x + 3m+2 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Từ M vẽ được ba tiếp tuyến phân biệt với (L) khi và chỉ khi phương trình (I) có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình (II) có hai nghiệm phân biệt khác -1, tức là:

$$\begin{cases} \Delta = 3(3m^2 - 4m - 4) > 0 \\ g(-1) = 6(m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{2}{3} \text{ hoặc } m > 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$$

Vậy nếu $m \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right) \setminus \{-1\}$ thì từ điểm $M(m; 3)$ vẽ được với (L) ba tiếp tuyến phân biệt.

3. Nhận thấy chính (D) là một tiếp tuyến đặc biệt của (L) qua M, gọi Δ_1 và Δ_2 là hai tiếp tuyến còn lại. Vì không có tiếp tuyến nào của (L) vuông góc với (D), nên hai tiếp tuyến vuông góc với nhau chỉ có thể là Δ_1 và Δ_2 . Hoành độ tiếp điểm x_1, x_2 của Δ_1 và Δ_2 với (L) là các nghiệm của phương trình:

$$2x^2 - (3m+2)x + 3m+2 = 0$$

Hệ số góc của Δ_1, Δ_2 là: $k_1 = 3(x_1^2 - 1), k_2 = 3(x_2^2 - 1)$

Ta có: $k_1 \cdot k_2 = 3(x_1^2 - 1) \cdot 3(x_2^2 - 1) = 9[(x_1 x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 + 1]$.

$$\text{Mà } x_1 x_2 = \frac{3m+2}{2}, x_1 + x_2 = \frac{3m+2}{2}.$$

Suy ra $k_1 \cdot k_2 = 27(m+1)$.

Hai tiếp tuyến Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow 27(m+1) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{28}{27}.$$

Vậy $M\left(-\frac{28}{27}; 3\right)$ là điểm duy nhất mà từ đó vẽ được với (L) ba tiếp tuyến phân biệt, trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\sqrt{3} \tan^3 x - (2\sqrt{3} + 1)\tan^2 x + (\sqrt{3} + 2)\tan x - 1 = 0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{3} \tan x - 1)(\tan x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + m\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $(x+y+z)^3 \geq (3\sqrt[3]{xyz})^3 = 27xyz$

Mà $xyz \geq x+y+z+2$ nên ta suy ra:

$$(x+y+z)^3 \geq 27(x+y+z+2) \Leftrightarrow (x+y+z)^3 - 27(x+y+z) - 54 \geq 0.$$

Đặt $t = x+y+z > 0$, ta được bất phương trình:

$$t^3 - 27t - 54 \geq 0 \Leftrightarrow (t-6)(t+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 6.$$

Vậy $\min(x+y+z) = 6$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$.

Câu 3.

1. Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Ta được $\int \tan^4 x dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt$.

$$\int \tan^4 x dx = \int (t^2 - 1) dt + \int dx = \frac{t^3}{3} - t + x + C = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.$$

2. Gọi $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = 1$.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow |\ln x| = 1 \Leftrightarrow \ln x = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \\ x = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Ta có $S = \int_{\frac{1}{e}}^e (1 - |\ln x|) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx$.

Tính $\int \ln x dx$.

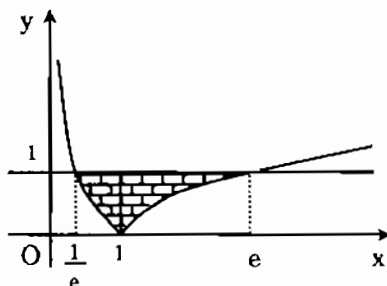
Đặt $u = \ln x$, $dv = dx$, ta được $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$.

Do đó $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$.

• $\int_{\frac{1}{e}}^1 (1 + \ln x) dx = (x - x \ln x + x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{1}{e}$.

• $\int_1^e (1 - \ln x) dx = (x - x \ln x + x) \Big|_1^e = e - 2$.

Vậy: $S = \frac{1}{e} + e - 2$ (đvdt).



Câu 4.

1. Đường thẳng (D) đi qua điểm $A(4; -2; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 2)$.

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

• $4 - (-2) + 2 \cdot 1 - 2 \neq 0 \Rightarrow A(4; -2; 1) \notin (P)$.

Suy ra (D) // (P).

2. Ta có: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Ta xét mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$x + y - 2 + m(x + z - 5) = 0 \Leftrightarrow (m+1)x + y + mz - 5m - 2 = 0.$$

Dễ thấy mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (D).

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (m+1; 1; m)$.

Nếu (Q) hợp với (P) một góc 60° thì ta có:

$$\cos 60^\circ = |\cos(\vec{n}, \vec{n}_Q)| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|1 \cdot (m+1) - 1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{(m+1)^2 + 1^2 + m^2}}.$$

$$\Leftrightarrow 6(2m^2 + 2m + 2) = 4.9m^2 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra có hai mặt thỏa mãn đề bài, phương trình là:

$$2x + y + z - 7 = 0, x + 2y - z + 1 = 0.$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $\log_{2008} \frac{4x^2 + 1}{x^6 + x^2 + 3} = x^6 - 3x^2 + 2$ (1)

Đặt $a = x^6 + x^2 + 3$, $b = 4x^2 + 1$ thì $a - b = x^6 - 3x^2 + 2$

$$\log_{2008} \frac{b}{a} = a - b \Leftrightarrow \log_{2008} b - \log_{2008} a = a - b \Leftrightarrow \log_{2008} b + b = \log_{2008} a + a$$
 (2)

Gọi $f(t) = \log_{2008} t + t$ thì $f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $f(a) = \log_{2008} a + a$, $f(b) = \log_{2008} b + b$.

Do đó: (2) $\Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$ (3)

Đặt $u = x^2$, phương trình (3) trở thành: $u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \text{ (loại)} \end{cases}$

Suy ra $x = \pm 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = \pm 1$.

2. a) Từ giả thiết ta có $AE = AG$, $BE = BG$, $CE = CG$, $DE = DG$.

Do đó bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt trung trực của đường chéo EG. Kết hợp với $AB = BC = CD = DA = a$ ta suy ra ABCD là hình thoi. Chứng minh tương tự AECG và BEDG cũng là hai hình thoi.

* Hai đường chéo một hình thoi thì vuông góc với nhau nên ta dễ dàng suy ra được ba đường chéo AC, BD và EG vuông góc với nhau từng đôi một.

* Gọi O là giao điểm của AC và BD thì O là trung điểm của AC và BD, suy ra O cũng là trung điểm của EG.

Vậy ba đường chéo AC, BD và EG cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

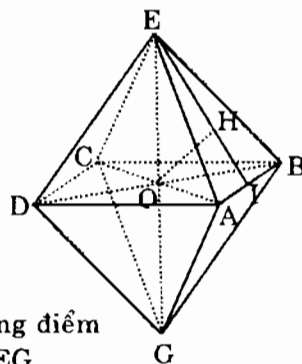
b) Hiển nhiên điểm O cách đều các mặt của khối bát diện đều ABCDEG, nên O là tâm của mặt cầu (S) nội tiếp của nó.

Gọi I là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của O trên EI. Ta dễ chứng minh được $OH \perp$ mặt phẳng (EAB). Suy ra bán kính của (S) là $r = OH$.

Từ tam giác EOI vuông tại O:

$$OH \cdot EI = OI \cdot OE \Rightarrow OH = \frac{OI \cdot OE}{EI} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Diện tích của mặt cầu (S) là: $S_{m/c} = 4\pi r^2 = \frac{2}{3}\pi a^2$.



ĐỀ 6

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

1. Khảo sát hàm số đã cho. Gọi đồ thị của hàm số là (L).
2. Trên (L) lấy ba điểm phân biệt A, B, C có hoành lần lượt là a, b, c. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $a + b + c = 0$.
3. Các tiếp tuyến của (L) tại A, B, C cắt (L) tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì ba điểm A_1, B_1, C_1 cũng thẳng hàng.

Câu 2.

1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$\sin^3 x - (m + 1)\sin^2 x + (m - 2)\sin x + 2m = 0.$$

2. Giải phương trình $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left| 2x - \frac{1}{x} \right| - 6 = 0$.

Câu 3.

1. Tính $\int \frac{1}{\cos x} dx$.
2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = 1$ và $y = \frac{x^2}{4}$ trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng (D) có phương

$$\text{trình tham số } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}.$$

1. Tìm tọa độ của điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm $A(4; 0; -1)$ trên đường thẳng (D).
2. Gọi Δ là đường thẳng qua điểm A và song song với (D). Trong các mặt phẳng qua Δ , hãy viết phương trình của mặt phẳng có khoảng cách đến (D) lớn nhất.

Câu 5.

1. Giải bất phương trình $1 + 2.2^x + 3.3^x < 6^x$.
2. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C và cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° .
 - a) Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
 - b) Tính thể tích của khối chóp $A.BCC'B'$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.
 - c) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (độc gia tự giải).
2. Ta có $A(a; a^3 - 3a + 1)$, $B(b; b^3 - 3b + 1)$, $C(c; c^3 - 3c + 1)$.

$\overrightarrow{AB} = (b - a; b^3 - a^3 - 3(b - a))$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ
 $\vec{u} = (1; a^2 + ab + b^2 - 3)$

Tương tự $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\vec{v} = (1; a^2 + ac + c^2 - 3)$

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{a^2 + ab + b^2 - 3}{a^2 + ac + c^2 - 3} = \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow ab + b^2 = ac + c^2 \Leftrightarrow (b - c)(a + b + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0 \text{ (do } b \neq c).$$

3. Phương trình tiếp tuyến của (L) tại A có dạng:

$$y = (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a + 1 \Leftrightarrow y = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 1.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (L) và tiếp tuyến tại A:

$$x^3 - 3x + 1 = (3a^2 - 3)x - 2a^3 + 1 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a \end{cases}$$

Suy ra A_1 có hoành độ $a_1 = -2a$.

Tương tự B_1, C_1 có hoành độ là $b_1 = -2b, c_1 = -2c$.

Do đó $a_1 + b_1 + c_1 = -2(a + b + c)$

Nếu A, B, C thẳng hàng thì $a + b + c = 0$, khi đó $a_1 + b_1 + c_1 = 0$.

Vậy ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Câu 2.

1. Xét phương trình

$$\sin^3 x - (m + 1)\sin^2 x + (m - 2)\sin x + 2m = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (\sin x - m)(\sin^2 x - \sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - m \\ \sin x - 1 \\ \sin x - 2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\bullet \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

• $m < -1$ hoặc $m > 1$: phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm

$$\bullet -1 < m < 1: \sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + n2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + n2\pi \end{cases}$$

$$\bullet m = 1: \sin x = m \Rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$$

Tóm lại:

$$+ m = -1: \text{ một họ nghiệm } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

+ $m = 1$: hai họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$

+ $-1 < m < 1$: ba họ nghiệm

$$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \arcsin m + n2\pi, x = \pi - \arcsin m + n2\pi$$

+ $m < -1$ hoặc $m > 1$: một họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k, n \in \mathbb{Z}$).

2. Xét phương trình $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 6 = 0$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 2 = 0, (x \neq 0)$$

Đặt $t = \left|2x - \frac{1}{x}\right|$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành $t^2 + t - 2 = 0$.

Giải được $t = 1$, $t = -2$. Loại nghiệm $t = -2$.

Với $t = 1$ ta được phương trình:

$$\left|2x - \frac{1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{x} = 1 \text{ hoặc } 2x - \frac{1}{x} = -1\right)$$

$$+ 2x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}$$

$$+ 2x - \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $x = 1$, $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 3.

1. Ta có $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$

$$\text{Đặt } t = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

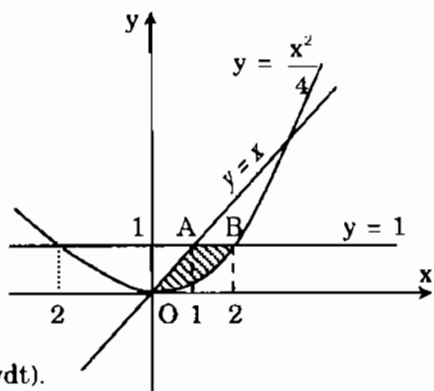
$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

2. Trong miền $x \geq 0$, $y \leq 1$ đường thẳng $y = 1$ cắt đường thẳng $y = x$ và parabol $y = \frac{x^2}{4}$ lần lượt tại các điểm $A(1; 1)$, $B(2; 1)$.

Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_1^2 \\
 &= \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \frac{5}{6}$ (đvdt).



Câu 4. Theo giả thiết (D):
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

1. Đường thẳng (D) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (D), thì phương trình của (α) là:

$$1.(x - 4) - 2.(y - 0) + 2.(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z - 2 = 0.$$

Tọa độ của điểm I, hình chiếu vuông góc của A trên (D) ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$(-2 + t) - 2(-2t) + 2(2 + 2t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 9t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Suy ra $I(-2; 0; 2)$.

2. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua đường thẳng Δ , thì $(P) \parallel (D)$ hoặc $(P) \supset (D)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Ta luôn có $IH \leq IA$ và $IH \perp AH$.

Để ý rằng $d((D), (P)) = d(I, (P)) = IH$ và $H \in (\alpha)$.

Trong mặt phẳng (α) , $IH \leq IA \Rightarrow \max IH = IA$, khi $H \equiv A$. Lúc này (P) ở vị trí (P_0) vuông góc với IA tại điểm A.

Do vậy, mặt phẳng thỏa mãn đề bài là mặt phẳng (P_0) vuông góc với IA tại A.

Vectơ pháp tuyến của (P_0) là $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (6; 0; -3)$, cùng phương với $\vec{v} = (2; 0; -1)$.

Phương trình của mặt phẳng (P_0) :

$$2.(x - 4) + 1.(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - z - 9 = 0.$$

Câu 5.

1. Xét bất phương trình $1 + 2.2^x + 3.3^x < 6^x$.

$$\text{Ta có } 1 + 2.2^x + 3.3^x < 6^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1 \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Vì $0 < \frac{1}{6} < 1$, $0 < \frac{1}{3} < 1$, $0 < \frac{1}{2} < 1$ nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 1$.

Do vậy: (*) $\Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(2; +\infty)$.

2. a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp(ABC).

Do A' cách đều A, B, C nên H là tâm của ΔABC

Từ giả thiết suy ra $\widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$.

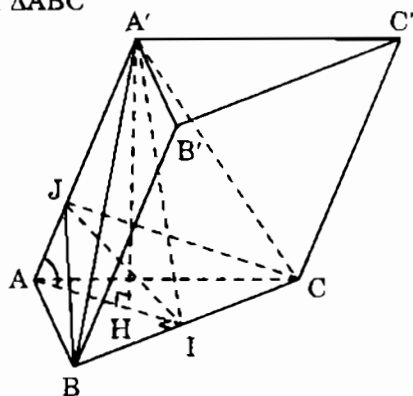
$$\text{Ta có } AH = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Từ tam giác A'AH vuông tại H:

$$A'H = AH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



- b) * Từ giác $BCC'B'$ là mặt bên của khối lăng trụ nên là hình bình hành.

Do đó $\Delta BCB' = \Delta C'B'C$

Suy ra $V_{ABCB'} = V_{AC'B'C}$

Gọi V_1 là thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ thì $V_1 = 2V_{ABCB'}$

$$\text{Mà } V_{ABCB'} = V_{B'ABC} = \frac{1}{3} V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy } V_1 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

* Mặt khác $BC \perp AI$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp \text{mp}(AA'I)$. Suy ra $BC \perp AA'$.

Mà $BB' \parallel AA'$ nên $BC \perp AA'$.

Suy ra mặt bên $BCC'B'$ là một hình chữ nhật.

$$\text{Tam giác } A'AH \text{ là nửa tam giác đều nên } AA' = 2AH = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

Gọi S là diện tích của hình chữ nhật $BCC'B'$:

$$S = BC \cdot BB' = BC \cdot AA' = \frac{2\sqrt{3}a^2}{3}$$

Gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$, ta có:

$$d = \frac{3V_1}{S_{BCC'B'}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6}}{\frac{2\sqrt{3}a^2}{3}} = \frac{3a}{4}$$

- c) Gọi J là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AA' .

Ta có: $AA' \perp BJ$ và $AA' \perp BC$ (do $BC \perp (AA'I)$ nên $AA' \perp (BCJ)$).

Suy ra $AA' \perp CJ$ và $AA' \perp IJ$.

$$\text{Tam giác } AIJ \text{ là nửa tam giác đều, suy ra } AJ = \frac{1}{2} AI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Từ tam giác ABJ vuông tại J:

$$BJ^2 = AB^2 - AJ^2 = a^2 - \frac{3a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow BJ = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của khối lăng trụ, ta có

$$S_{xq} = S_{BCC'B'} + S_{ABB'A'} + S_{ACC'A'}$$

$$S_{xq} = BC.BB' + AA'.BJ + AA'.CJ \quad (CJ = BJ)$$

$$S_{xq} = AA'.(BC + BJ + CJ) = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \left(a + 2\frac{a\sqrt{13}}{4} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} (2 + \sqrt{13}).$$

ĐỀ 7

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3ax$. (a là tham số)

- Với $a \geq 4$, hãy xét sự biến thiên của hàm số.
- Tìm các giá trị của a để hàm số đạt cực đại và cực tiểu.
- Gọi A, B là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số. Với giá trị nào của a thì ba điểm A, B, I thẳng hàng với $I(0; 2)$.

Câu 2.

- Giải phương trình $3\sin 2x - 4\cos 2x + 10\sin x + 4 = 0$
- Với các giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm?

$$\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$$

Câu 3.

- Tính $\int \frac{\cos x + 1}{\sin^3 x} dx$.
- Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $\Delta: y = 2x - 4$.

Câu 4. Trong không gian với hệ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; -1), B(-1; 3; 1)$.

- Viết phương trình của mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.
- Tìm điểm M trên trục tung sao cho tam giác MAB là một tam giác vuông.

Câu 5.

- Chứng minh rằng với mọi x ta đều có:

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$$

- Cho khối tứ diện ABCD trong đó hai đường thẳng AB và CD hợp với nhau một góc α và khoảng cách giữa chúng bằng d . Chứng minh rằng thể tích của khối tứ diện ABCD được tính bằng công thức:

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha.$$

Giải

Câu 1.

Ghi chú:

Nếu $y = f(x)$ là một hàm số đa thức thì phương trình của hàm số luôn có thể viết dưới dạng: $f(x) = f'(x).P(x) + R(x)$, trong đó $P(x)$, $R(x)$ là các hàm số đa thức.

1. Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3ax$ có đạo hàm $y' = 3(x^2 - 4x + a)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + a = 0.$$

Ta có $\Delta' = 4 - a$. Nếu $a \geq 4$ thì $\Delta' \leq 0$ với mọi a . Suy ra $y' \geq 0$ với mọi x .

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm số đạt cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua hai nghiệm đó, điều này tương đương với:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - a > 0 \Leftrightarrow a < 4.$$

3. Phương trình của hàm số có thể viết:

$$y = y' \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3} \right) + 2(a - 4)x + 2a. (*)$$

Gọi $A(x_1; y_2)$, $B(x_2; y_2)$ là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$. Thế x_1, x_2 vào (*) ta được:

$$y_1 = 2(a - 4)x_1 + 2a, y_2 = 2(a - 4)x_2 + 2a.$$

Suy ra phương trình đường thẳng qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là:

$$y = 2(a - 4)x + 2a \quad (\Delta)$$

Ba điểm A, B và I thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$I(0; 2) \in \Delta \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy nếu $a = 1$ thì ba điểm A, B và I thẳng hàng.

Câu 2.

1. Xét phương trình $3\sin 2x - 4\cos 2x + 10\sin x + 4 = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 6\sin x \cos x - 4(1 - 2\sin^2 x) + 10\sin x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x \cos x + 4\sin^2 x + 5\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(3\cos x + 4\sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & (2) \\ 3\cos x + 4\sin x = -5 & (3) \end{cases}$$

• $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi.$

• Chia hai vế phương trình (3) cho $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ và đặt $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

ta được phương trình:

$$\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = -1 \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = \pi + m2\pi \Leftrightarrow x = \pi + \alpha + m2\pi.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

$$x = k\pi, x = \pi + \alpha + m2\pi (k, m \in \mathbb{Z}).$$

2. Xét phương trình $\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2} (*)$

i) Nếu $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình (*) trở thành:

$$\frac{x+1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{x}{x+\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x+1 = x \left(x \neq -\frac{3}{2}\right): \text{ vô nghiệm.}$$

ii) Nếu $m \neq -\frac{1}{2}$ thì (*) có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m-1; -m-2\}$. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(x+m+2) = x(x-m+1) \Leftrightarrow 2(m+1)x = -m-2 \quad (a)$$

• $m = -1$: (a) $\Rightarrow 0 \cdot x = -1$, phương trình (a) vô nghiệm

• $m \neq -1$: phương trình (a) có nghiệm $x = \frac{-m-2}{2(m+1)}$

Nghiệm này nhận được khi:

$$\begin{cases} \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq m-1 \\ \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2+m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Tóm lại:

Nếu $m \notin (-\frac{1}{2}; -2; -1; 0)$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{-m-2}{2(m+1)}$

Câu 3.

1. $\int \frac{\cos x + 1}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx + \int \frac{1}{\sin^3 x} dx$

• $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C_1.$

• Tính $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^3 x} dx &= \int \left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^3 \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2}\right) + C_2 = \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| - \frac{1}{8} \cot^2 \frac{x}{2} + C_2. \end{aligned}$$

Vậy $\int \frac{\cos x + 1}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| - \frac{1}{8} \cot^2 \frac{x}{2} + C.$

2. Phương trình tung độ giao điểm của (P) và Δ :

$$y^2 = 2(y + 4) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -2 \text{ hoặc } y = 4.$$

Chọn y làm biến số, khi đó:

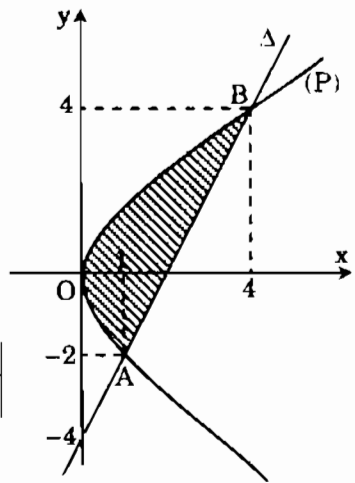
$$y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}, y = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y + 4}{2}.$$

Diện tích của hình phẳng là:

$$S = \int_{-2}^4 \left| \frac{y^2}{4} - \frac{y + 4}{2} \right| dy = \frac{1}{4} \left| \int_{-2}^4 (y^2 - 2y - 8) dy \right|$$

$$S = \frac{1}{4} \left[\frac{y^3}{3} - y^2 - 8y \right]_{-2}^4 = 9.$$



Vậy diện tích hình phẳng là $S = 9$ (đvdt).

Câu 4.

1. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, thì (α) đi qua điểm

$I(0; \frac{5}{2}; 0)$ là trung điểm của AB.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{AB} = (-2; 1; 2)$.

Phương trình của mặt phẳng (α) :

$$-2.(x - 0) + 1.(y - \frac{5}{2}) + 2.(z - 0) = 0 \Leftrightarrow -4x + 2y + 4z - 5 = 0.$$

2. Gọi $M(0; y; 0) \in Oy$ là điểm cần tìm. Chia ba trường hợp:

(i) Tam giác MAB vuông tại M:

Ta có $\vec{AM} = (-1; y - 2; 1)$, $\vec{BM} = (1; y - 3; -1)$.

Tam giác MAB vuông tại M khi và chỉ khi:

$$\vec{AM} \perp \vec{BM} \Leftrightarrow (-1).1 + (y - 2).(y - 3) + 1.(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y = 1 \text{ hoặc } y = 4)$$

Ta được $M(0; 1; 0)$ hoặc $M(0; 4; 0)$.

(ii) Tam giác MAB vuông tại A:

Ta có $\vec{AB} = (-2; 1; 2)$, $\vec{AM} = (-1; y - 2; 1)$.

Tam giác MAB vuông tại A khi và chỉ khi:

$$\vec{AB} \perp \vec{AM} \Leftrightarrow (-2).(-1) + 1.(y - 2) + 2.1 = 0 \Leftrightarrow y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

Ta được $M(0; -2; 0)$

(iii) Tam giác MAB vuông tại B:

Ta có $\vec{BM} = (1; y - 3; -1)$, $\vec{AB} = (-2; 1; 2)$

Tam giác MAB vuông tại B khi và chỉ khi:

$$\vec{AB} \perp \vec{BM} \Leftrightarrow (-2).1 + 1.(y - 3) + 2.(-1) = 0 \Leftrightarrow y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 7.$$

Ta được $M(0; 7; 0)$.

Tóm lại có bốn điểm trên Oy để ΔMAB vuông là:

$$M_1(0; 1; 0), M_2(0; 4; 0), M_3(0; -2; 0), M_4(0; 7; 0).$$

Câu 5.

1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức:

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \geq 0$$

Xét hàm số $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Ta cần chứng minh $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+x^2 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Ta lại có $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \Rightarrow f''(0) > 0$.

Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(x)_{CT} = 0$

Suy ra $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (đpcm)

2. Vẽ hình bình hành $ABED$.

• $DE \parallel AB \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = (\widehat{CD, DE}) = \alpha$

• $\Delta ABD = \Delta EBD$ và hai tam giác này cùng nằm trong một mặt phẳng. Do đó:

$$V = V_{ABCD} = V_{CABD} = V_{CEBD} = V_{BCDE}$$

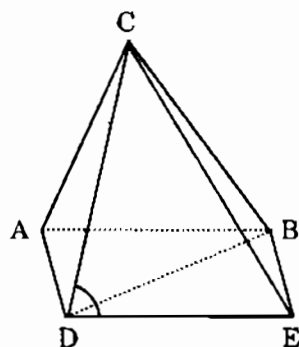
Mà $V_{B,CDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{CDE} \cdot h$ với h là khoảng

cách từ B đến $mp(CDE)$.

$$\bullet S_{CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot CD \sin \alpha = \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin \alpha.$$

• Mặt phẳng (CDE) chứa CD và song song với AB , do đó h chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD tức là $h = d$.

$$\text{Vậy: } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha \text{ (đpcm).}$$



ĐỀ 8

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), gọi đồ thị của hàm số là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$, $d = -1$.
2. Gọi I là điểm thuộc (C) có hoành độ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Chứng minh rằng trong tất cả các tiếp tuyến của (C) thì tiếp tuyến tại điểm I có hệ số góc nhỏ nhất khi $a > 0$ và có hệ số góc lớn nhất khi $a < 0$.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sin 2x - 2\cos^2 x = \sqrt{2} \sin x - 1$
2. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

Câu 3.

1. Tính $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} dx$
2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ và parabol (P): $y = \frac{3}{4}x^2$ trong miền $y \geq 0$.

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$, $C(-5; 2; -6)$.

1. Tính độ dài đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC.
2. Viết phương trình của mặt phẳng qua BC có khoảng cách đến điểm A lớn nhất.

Câu 5.

1. Chứng minh rằng $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ với mọi $x > 1$.
2. Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều với $AB = CD = CD = a$ và $AD = 2a$. Hai mặt bên SAB và SAD vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBD) tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc 45° .
 - a) Tính góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD).
 - b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).
 - c) Gọi M là trung điểm của cạnh SB, mặt phẳng (ADM) cắt SC tại N. Tính thể tích khối chóp S.AMND.

Giải

Câu 1.

1. Khi $a = -2$, $b = 3$, $c = 0$, $d = -1$ ta được hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ (đọc giả tự giải).

2. Ta có $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f'(x) = 6ax + 2b$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Suy ra $I(x_1; y_1)$ với $x_1 = -\frac{b}{3a}$ và $y_1 = f\left(-\frac{b}{3a}\right)$

Nếu gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm bất kì $M(x; f(x))$ thì $k = f'(x)$.

Vì hàm số $k = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ là một hàm số bậc hai nên:

* Nếu $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
k'	$-$	0	$+$
k	$\searrow \quad \frac{3ac - b^2}{3a} \quad \nearrow$		

Rõ ràng tiếp tuyến của (C) tại điểm I có hệ số góc nhỏ nhất là

$$\min(k) = f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = \frac{3ac - b^2}{3a}$$

* Nếu $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$	$+\infty$
k'	$+$	0	$-$
k	$\nearrow \quad \frac{3ac - b^2}{3a} \quad \searrow$		

Rõ ràng tiếp tuyến của (C) tại điểm I có hệ số góc lớn nhất là

$$\max(k) = f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = \frac{3ac - b^2}{3a}$$

Câu 2.

1. Xét phương trình $\sin 2x - 2\cos^2 x = \sqrt{2} \sin x - 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sin 2x - 2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = \sqrt{2} \sin x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

Tính các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -3m \end{vmatrix} = -m^2 - 3m = -m(m + 3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2m + 3 & -3m \end{vmatrix} = -2m(m + 3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2m + 3 \end{vmatrix} = m + 3$$

Biện luận:

- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -3$ thì $D \neq 0$: hệ phương trình có một nghiệm

$$x = \frac{-2m(m + 3)}{-m(m + 3)} = 2, y = \frac{m + 3}{-m(m + 3)} = -\frac{1}{m}$$

- Nếu $m = 0$ thì $D_y = 3 \neq 0$: Hệ phương trình vô nghiệm

- Nếu $m = -3$ thì $D_x = 0$ và $D_y = 0$: Hệ thu lại $x - 3y = 1$

Hệ phương trình có vô số nghiệm: $y = y_0, x = 3y_0 + 1$ với $y_0 \in \mathbb{R}$.

Câu 3.

1.
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

Mà
$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

Đặt $t = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C$$

Vậy
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C.$$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và (P):

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{3}{4}x^2\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 3x^4 + 4x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{16 - x^2}$$

Hình phẳng cần tính diện tích là hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{16 - x^2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{16 - x^2}, x = -2, x = 2$$

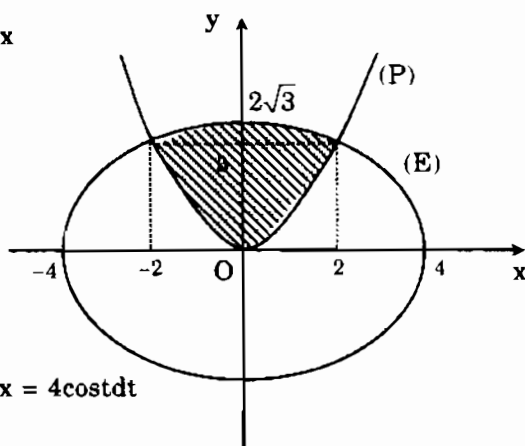
Do Oy là trục đối xứng của (E) và (P), nên diện tích của hình phẳng là:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{16-x^2} - \frac{3}{4} x^2 \right) dx$$

$$= \sqrt{3} \int_0^2 \sqrt{16-x^2} dx - \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx$$

$$\bullet \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\bullet \text{ Tính } \int_0^2 \sqrt{16-x^2} dx$$



$$\text{Đặt } x = 4 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$$

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } t = 0, \text{ khi } x = 2 \text{ thì } t = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^2 \sqrt{16-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{16(1-\sin^2 t)} \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= 8 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 8 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\text{Vậy: } S = 8\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3} + 2 \text{ (đvdt).}$$

Câu 4. Theo giả thiết $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$, $C(-5; 2; -6)$.

1. Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ A của tam giác ABC. ta có

$$\overrightarrow{DC} = -\frac{AC}{AB} \cdot \overrightarrow{DB} \quad (*)$$

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}, AC = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{6}$$

Thế vào (*) ta được $\overrightarrow{DC} = -3\overrightarrow{DB}$, như thế D là điểm chia đoạn thẳng CB theo tỉ số $k = -3$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_D = \frac{-5 + 3 \cdot 2}{1 + 3} \\ y_D = \frac{2 + 3 \cdot 1}{1 + 3} \\ z_D = \frac{-6 + 3(-2)}{1 + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{1}{4} \\ y_D = \frac{5}{4} \\ z_D = -3 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -3\right).$$

$$\text{Vậy: Độ dài phân giác trong kẻ từ A là } AD = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{81}{16} + 0} = \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

2. Đường thẳng BC có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{CB} = (7; -1; 4)$.

Phương trình của đường thẳng BC:
$$\begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$$

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với BC, thì phương trình của (α) là:

$$7.(x - 1) - 1.(y + 1) + 4.(z + 3) = 0 \Leftrightarrow 7x - y + 4z + 4 = 0.$$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC, tọa độ của điểm I ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$7(2 + 7t) - (1 - t) + 4(-2 + 4t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 66t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{22}.$$

Suy ra $I\left(\frac{23}{22}, \frac{25}{22}, \frac{28}{11}\right)$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua BC, thì $(P) \parallel BC$ hoặc $(P) \supset BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Ta luôn có $AH \leq AI$ và $IH \perp AH$.

Để ý rằng $d(A, (P)) = AH$ và $H \in (\alpha)$.

Trong mặt phẳng (α) , $AH \leq IA \Rightarrow \max AH = AI$, khi $H \equiv I$. Lúc này (P) ở vị trí (P_0) vuông góc với AI tại điểm I.

Do vậy, mặt phẳng thỏa mãn đề bài là mặt phẳng (P_0) vuông góc với AI tại I.

Vectơ pháp tuyến của (P_0) là $\vec{n} = \overline{AI} = \left(\frac{1}{22}, \frac{47}{22}, -\frac{61}{11}\right)$, cùng phương với

$$\vec{v} = (1; 47; -122).$$

Phương trình của mặt phẳng (P_0) :

$$1.(x - 2) + 47.(y - 1) - 122.(z + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 47y - 122z - 293 = 0.$$

Câu 5.

1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức:

$$\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0$$

Xét hàm số $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, $x \in [1; +\infty)$

Ta có
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0, x \in [1; +\infty)$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$, do đó:

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0$$

Vậy $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ với mọi $x > 1$.

2. a) Từ giả thiết ta chứng minh được $SA \perp (ABCD)$, cũng từ giả thiết ta suy ra, nửa lục giác đều ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AD, do đó $\widehat{ABD} = 90^\circ$ hay $BD \perp AD$, từ đó suy ra $BD \perp SB$.

Do vậy góc giữa (SBD) và đáy là góc $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $SA = AB = a$.

Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ hay $CD \perp AC$. Suy ra $CD \perp SC$.

Suy ra góc giữa (SCD) và đáy là $\widehat{SCA}$.

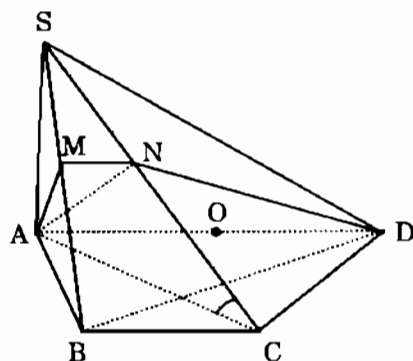
Từ tam giác ACD vuông tại C:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AD^2 - CD^2} \\ &= \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3} \end{aligned}$$

Từ tam giác SAC vuông tại A:

$$\begin{aligned} \tan \widehat{SCA} &= \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow \widehat{SCA} &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa (SCD) và đáy là 30° .



$$\text{b) Ta có } V_{S.BCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CD \cdot \sin 120^\circ \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Mặt khác } V_{S.BCD} = V_{C.SBD} = \frac{1}{3} S_{SBD} \cdot d(C, (SBD)) (*)$$

$$\text{Trong đó } S_{SBD} = \frac{1}{2} SB \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot a \sqrt{2} \cdot a \sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{2} \quad (BD = AC = a\sqrt{3})$$

$$\text{Từ (*) cho } \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{6}}{2} \cdot d(C, (SBD))$$

$$\text{Vậy } d(C, (SBD)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

c) Thể tích khối chóp S.AMND

Mặt phẳng (ADM) song song với BC nên cắt (SBC) theo giao tuyến $MN \parallel BC$, M là trung điểm của SB nên N là trung điểm của SC. Ta có:

$$V_{S.AMND} = V_{S.AMN} + V_{S.AND}.$$

$$\bullet V_{S.AMN} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} V_{S.ABC}$$

$$\text{Mà } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}.$$

$$\bullet V_{S.AND} = \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot SA = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \sqrt{3} \cdot a \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy } V_{S.AMND} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48} + \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} = \frac{5a^3 \sqrt{3}}{48}.$$

ĐỀ 9

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m + 1)x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Xác định các giá trị của m để hàm số có hai cực trị.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_2) của hàm số ứng với $m = 2$.
3. Dựa vào đồ thị (C_2) hãy xác định các giá trị của k để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| + k = 0$.

Câu 2.

1. Xác định các giá trị của m để hai phương trình sau đây tương đương với nhau:

$$4\cos^3 x - (2m + 3)\cos 2x + 2(3m + 1)\cos x - 4m - 3 = 0 \quad (1)$$

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \quad (2)$$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases}$$

Câu 3.

1. Tính $\int \frac{1}{\sin x - \sqrt{3}\cos x} dx$

2. Trên đường cong $(C): y = -x^3 + 3x^2$ lấy hai điểm A và B có hoành độ lần lượt là 3 và 1.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai tiếp tuyến của (C) tại A và B.

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 0; 1)$.

1. Xác định hình tính của tam giác ABC. Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.
2. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 5.

1. Chứng minh bất đẳng thức $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Một mặt phẳng đi qua $A'B'$ và qua trung điểm I của cạnh AC chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Giải

Câu 1.

1. Xét hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m + 1)x - 2$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m + 1) = 3(x^2 - 2mx + m + 1)$

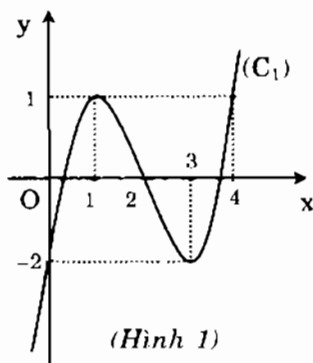
Biệt thức $\Delta' = m^2 - m - 1$.

Điều kiện để hàm số có hai cực trị là phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua hai nghiệm đó, tức là:

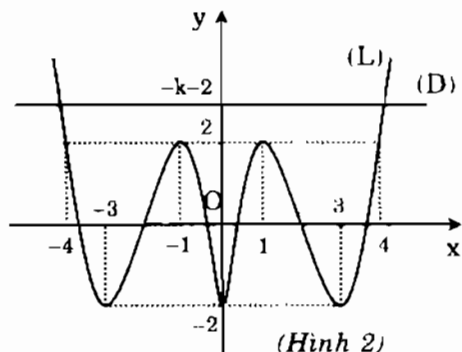
$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } m > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

2. Khi $m = 2$ phương trình của hàm số trở thành $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ (dọc giả tự khảo sát).

Đồ thị của hàm số có dạng như hình 1.



(Hình 1)



(Hình 2)

3. Xét phương trình $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| + k = 0$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow |x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 2 = -k - 2$ (2)

Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số:

$$g(x) = |x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 2 \text{ (L) và } y = -k - 2 \text{ (D).}$$

Nhận thấy rằng $g(x)$ là một hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Khi $x \geq 0$ ta được $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Kết hợp với đồ thị của hàm số $f(x)$, ta được đồ thị của hàm số $g(x)$ có dạng như hình 2.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình

$$|x|^3 - 6x^2 + 9|x| + k = 0$$

có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$-2 < -k - 2 < 2 \Leftrightarrow -4 < k < 0.$$

Câu 2.

1. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ hoặc } \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - (2m + 3)\cos^2 x + (3m + 1)\cos x - m = 0$$

Đặt $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$), ta được phương trình

$$4t^3 - (2m + 3)t^2 + (3m + 1)t - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)(t - 1)(t - m) = 0 \quad (3)$$

Phương trình trên có ba nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = m$

Như vậy hai phương trình (1) và (2) tương đương với nhau khi và chỉ khi phương trình (3) có đúng hai nghiệm $t = 1$ và $t = \frac{1}{2}$.

Có các trường hợp xảy ra như sau:

$$+ t_3 = t_1 \Leftrightarrow m = 1.$$

$$+ t_3 = t_2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$+ t_3 < -1 \text{ hoặc } t_3 > 1 \Leftrightarrow m < -1 \text{ hoặc } m > 1.$$

Tóm lại, nếu $m \in (-\infty, -1) \cup (1; +\infty) \cup \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$ thì hai phương trình (1) và (2) tương đương với nhau.

2. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 & (1) \\ xy + x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

Đây là hệ chưa đối xứng, để được hệ đối xứng ta đặt $t = -x$ và được hệ sau:

$$\begin{cases} t^2 + y^2 + t + y = 2 \\ ty + t + y = 1 \end{cases}$$

Tiếp tục đặt: $S = t + y$ và $P = ty$, hệ trở thành
$$\begin{cases} S^2 - 2P + S = 2 \\ S + P = 1 \end{cases}$$

Khử P ta được phương trình:

$$S^2 - 2(1 - S) + S = 2 \Leftrightarrow S^2 + 3S - 4 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm: $S = 1$ hoặc $S = -4$.

• $S = 1 \Rightarrow P = 0$: Trường hợp này ta có hệ

$$\begin{cases} t + y = 1 \\ ty = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ và } y = 1 \\ y = 0 \text{ và } t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ và } y = 1 \\ x = -1 \text{ và } y = 0 \end{cases}$$

• $S = -4 \Rightarrow P = 5$: Trường hợp này t và y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + 4X + 5 = 0$$

Phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại: Hệ phương trình có hai nghiệm $x = 0, y = 1$ hoặc $x = -1, y = 0$.

Câu 3.

1. Ta có
$$\int \frac{1}{\sin x - \sqrt{3}\cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{\sin x - \sqrt{3}\cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \right| + C$$

$$\text{Vậy } \int \frac{1}{\sin x - \sqrt{3}\cos x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \right| + C.$$

2. (C): $y = -x^3 + 3x^2$, suy ra $A(3; 0)$, $B(1; 2)$

$$y' = 3(2x - x^2) \Rightarrow y'(3) = -9, y'(1) = 3$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(3; 0)$:

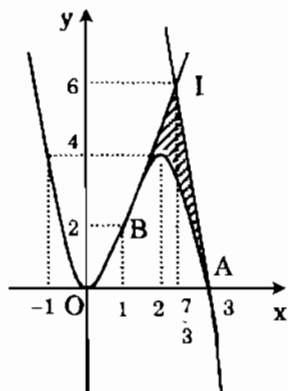
$$y = -9(x - 3) \Leftrightarrow y = -9x + 27$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $B(1; 2)$:

$$y = 3(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

Tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -9x + 27 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = 6 \end{cases}$$



Hai tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại điểm $I(\frac{7}{3}; 6)$

Dựa vào đồ thị, diện tích của hình phẳng là:

$$S = \int_1^{\frac{7}{3}} ((3x - 1) - (-x^3 + 3x^2)) dx + \int_{\frac{7}{3}}^3 ((-9x + 27) - (-x^3 + 3x^2)) dx$$

$$S = \int_1^{\frac{7}{3}} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx + \int_{\frac{7}{3}}^3 (x^3 - 3x^2 - 9x + 27) dx$$

$$S = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^{\frac{7}{3}} + \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9x^2}{2} + 27x \right) \Big|_{\frac{7}{3}}^3 = \frac{64}{81} + \frac{44}{81}$$

Vậy $S = \frac{4}{3}$ (đvdt)

Câu 4. $A(1; 2; 3)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 0; 1)$.

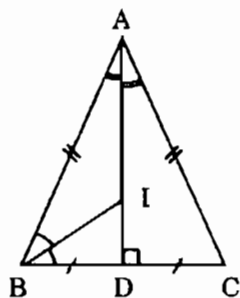
1. Ta dễ dàng tính được $AB = AC = 3$, $BC = 2$.

Do đó $\triangle ABC$ cân tại A. Gọi D là trung điểm của BC thì AD là đường cao và cũng là phân giác trong của góc A trong $\triangle ABC$.

* Chu vi của $\triangle ABC$: $2p = 8$

* Ta có $D(1; 0; 1)$, suy ra $AD = 2\sqrt{2}$. Diện tích $\triangle ABC$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 2\sqrt{2}.$$



2. Trong $\triangle ABC$ vẽ phân giác trong của góc B cắt AD tại I, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Trong $\triangle ABD$ với phân giác trong BI ta có $\frac{IA}{ID} = -\frac{AB}{BD}$, $ID = -3 \cdot IA$.

Như thế I là điểm chia đoạn thẳng AD theo tỉ số $k = -3$. Ta được:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+3.1}{1+3} \\ y_1 = \frac{2+3.0}{1+3} \\ z_1 = \frac{3+3.1}{1+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ y_1 = \frac{1}{2} \\ z_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Vậy đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ có tâm là $I\left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính là

$$r = ID = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 5.

1. Chứng minh bất đẳng thức $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Ta có } 1 < \log_2 3 < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt{\log_2 3} < \sqrt{2}$$

$$\text{Và } \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} \Rightarrow \sqrt{\log_3 2} = \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}$$

$$\text{Như vậy } \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} = \sqrt{\log_2 3} + \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{\log_2 3} \text{ thì } 1 < x < \sqrt{2} \text{ và } \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} = x + \frac{1}{x}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ với $x \in (1; \sqrt{2})$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0, x \in (1; \sqrt{2})$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; \sqrt{2})$, do đó:

$$1 < x < \sqrt{2} \Rightarrow f(1) < f(x) < f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2 < x + \frac{1}{x} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cho } x = \sqrt{\log_2 3} \text{ ta được: } 2 < \sqrt{\log_2 3} + \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}} < \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Hay } 2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ (đpcm) }$$

2. Gọi S , h , V là diện tích đáy, chiều cao, thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Mặt phẳng $(A'B'I)$ song song với AB nên cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến $IJ \parallel AB$ (J là trung điểm của BC).

Ta gọi V_1 là thể tích khối chóp cắt $A'B'C'.IJC$ và V_2 là thể tích của phần còn lại.

Ba đường thẳng CC' , IA' , JB' đồng quy tại điểm K .

Trong mp $(ACC'A')$:

$$IC \parallel A'C' \Rightarrow \frac{KC}{KC'} = \frac{IC}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow C \text{ là trung điểm của } KC'.$$

Suy ra $d(K, (A'B'C')) = 2h$

Hai tam giác CIJ và CAB đồng dạng, tỉ số

$$\text{đồng dạng } k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } S_{CIJ} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{S}{4}$$

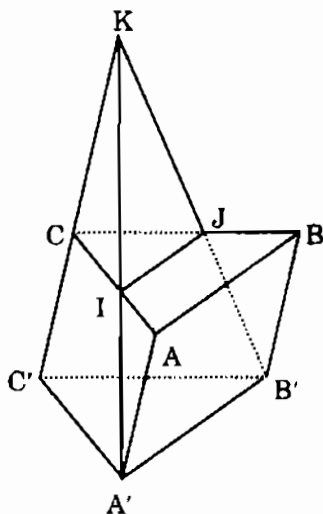
$$\text{Ta có: } V_1 = V_{K.A'B'C'} - V_{K.IJC}$$

$$= \frac{1}{3} S_{A'B'C'} \cdot 2h - \frac{1}{3} S_{CIJ} \cdot h$$

$$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot 2h - \frac{1}{3} \frac{S}{4} \cdot h = \frac{7}{12} Sh = \frac{7V}{12}.$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{5V}{12}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$



ĐỀ 10

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m-2)x$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn đạt cực đại và cực tiểu.
2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C_m) .
3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = \frac{1}{3}$.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$.
2. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình sau có nghiệm?

$$\begin{cases} x^2 + x + a = 0 \\ x^2 + ax + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 3.

1. Tính $\int_0^1 x \ln^2(x^2 + 1) dx$.
2. Tính thể tích của khối tròn xoay, khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục hoành:

$$y = \sin^2 x, y = 0, x = 0, x = \pi.$$

Câu 4.

1. Cho x, y là hai số bất kì. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 2}.$$

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy viết phương trình của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm A(2; 4; 0) và đi qua điểm B(3; 6; 1).

Câu 5.

1. Giải bất phương trình $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \leq 0$ (*).
2. Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và các cạnh bên cùng hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° .
- a) Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.
- b) Một mặt phẳng (P) qua BC và vuông góc với cạnh SA chia khối chóp đã cho thành hai phần. Tính thể tích của hai phần đó.

Giải**Câu 1.**

1. Xét hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m-2)x$.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = f'(x) = 3(x^2 - 2mx + m - 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 2 = 0 \quad (*)$$

Biệt thức $\Delta' = m^2 - m + 2 > 0$, với mọi $m \in \mathbb{R}$

Do đó phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, suy ra với mọi m hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu.

2. Gọi $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (C_m) thì x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, tức là $f'(x_1) = 0$ và $f'(x_2) = 0$.

Phương trình của hàm số $f(x)$ có thể viết:

$$f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{m}{3} \right) + (-2m^2 + 2m - 4)x + m(m - 2)$$

$$\text{Suy ra } y_1 = f(x_1) = (-2m^2 + 2m - 4)x_1 + m(m - 2) \quad (1)$$

$$y_2 = f(x_2) = (-2m^2 + 2m - 4)x_2 + m(m - 2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta kết luận: phương trình của đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

$$y = (-2m^2 + 2m - 4)x + m(m - 2).$$

3. Khi $m = \frac{1}{3}$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 - x^2 - 5x$.

(độc giả tự giải).

Câu 2.

1. Xét phương trình $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2} \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 4\cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$$

Nếu $\cos x = 0$ thì $\sin x = 0$, vô lí. Do đó $\cos x \neq 0$

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được phương trình:

$\tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$. Giải được $\tan x = 1$ hoặc $\tan x = -5$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = \arctan(-5) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + x + a = 0 \\ x^2 + ax + 1 = 0 \end{cases}$$

Giả sử hệ phương trình có nghiệm là x_0 , khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 + a = 0 & (1) \\ x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $(1 - a)x_0 = 1 - a$ (*)

+ Nếu $a = 1$ thì phương trình (*) có vô số nghiệm, trong trường hợp này hai phương trình thu lại một phương trình là $x^2 + x + 1 = 0$, nhưng phương trình này vô nghiệm.

+ Nếu $a \neq 1$ thì phương trình (*) có một nghiệm $x_0 = 1$.

Thế $x_0 = 1$ vào hệ phương trình đã cho ta được $a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Kết luận: Nếu $a = -2$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 3.

1. Tính
$$\int_0^1 x \ln^2(x^2 + 1) dx$$

Đặt $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$ ta được:

Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = 1$ thì $t = 2$

$$\int_0^1 x \ln^2(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln^2 t dt$$

Tính
$$\int_1^2 \ln^2 t dt$$

Đặt $u = \ln^2 t$, $dv = dt$. Ta được $du = 2 \frac{\ln t}{t} dt$, $v = t$

$$\int_1^2 \ln^2 t dt = t \ln^2 t \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 \ln t dt = 2 \ln^2 2 - 2 \int_1^2 \ln t dt$$

Đặt $s = \ln t$, $dr = dt$ ta được $ds = \frac{1}{t} dt$ và $t = e^s$

$$\int_1^2 \ln^2 t dt = 2 \ln^2 2 - 2 \left(t \ln t \Big|_1^2 - \int_1^2 dt \right) = 2 \ln^2 2 - 2(2 \ln 2 - 1)$$

Vậy
$$\int_0^1 x \ln^2(x^2 + 1) dx = \ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1 = (\ln 2 - 1)^2.$$

2. Ta có:

$$V = \pi \int_0^\pi (\sin^2 x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{\pi}{8} \int_0^\pi (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) dx$$

$$V = \frac{\pi}{8} \left(3x - 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi^2}{8} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4.

1. Viết A dưới dạng $A = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + 1}$.

Trong không gian Oxyz, xét các vectơ: $\vec{u} = (x; y-2; 1)$, $\vec{v} = (-x-1; -y; 1)$.

Ta có: $\vec{u} + \vec{v} = (-1; -2; 2)$

Suy ra: $A = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $|\vec{u} + \vec{v}| = 3$.

Mặt khác với vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 3$.

Do đó: $A \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng, tức là:

$$\frac{x}{-x-1} = \frac{y-2}{-y} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{-x-1} = 1 \\ \frac{y-2}{-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $\min A = 3$, xảy ra khi $x = -\frac{1}{2}$ và $y = 1$.

2. Gọi I(a; b; c) là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S) thỏa đề bài.

• Do (S) tiếp xúc với mp(Oxy) tại điểm A(2; 4; 0) nên $a = 2$, $b = 4$, tức là I(2; 4; c).

• Vì (S) đi qua điểm B(3; 6; 1) nên ta có:

$$IA = IB = R \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow c^2 = (3-2)^2 + (6-4)^2 + (1-c)^2 \Leftrightarrow c = 3.$$

Suy ra I(2; 4; 3) và $R = 3$. Vậy phương trình của mặt cầu (S) là:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Câu 5.

1. Xét bất phương trình $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \leq 0$ (*)

Điều kiện: $x \neq 0$

Nhận xét rằng $2^x - 1 > 0$ khi $x > 0$

và $2^x - 1 < 0$ khi $x < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó (*)} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1-x} - 2x + 1 \leq 0 & \text{khi } x > 0 \\ 2^{1-x} - 2x + 1 \geq 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1-x} \leq 2x - 1 & \text{khi } x > 0 \\ 2^{1-x} \geq 2x - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

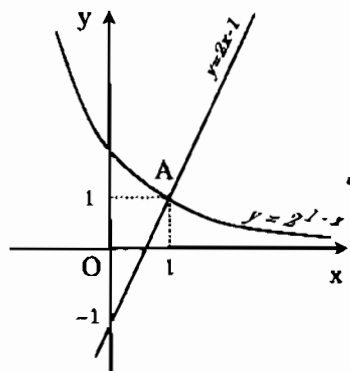
Gọi (C): $y = 2^{1-x}$ và $\Delta: y = 2x - 1$

Dễ thấy điểm A(1; 1) là một giao điểm của (C) và Δ .

Mặt khác trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = 2^{1-x}$ là hàm số nghịch biến và $y = 2x - 1$ là hàm số đồng biến, nên A(1; 1) là giao điểm duy nhất của (C) và Δ .

Dựa vào đồ thị ta có kết quả sau:

$$\bullet \begin{cases} 2^{1-x} \leq 2x - 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$



$$\bullet \begin{cases} 2^x \geq 2x - 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

2. a) Kẻ đường cao SH của hình chóp, thì H là tâm của $\triangle ABC$
Do đó SH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Gọi I là trung điểm của BC và J là trung điểm của SA. Dựng mặt phẳng trung trực của SA tại J cắt SH tại O, điểm O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Tứ giác AHOJ nội tiếp trong đường tròn, nên ta có:

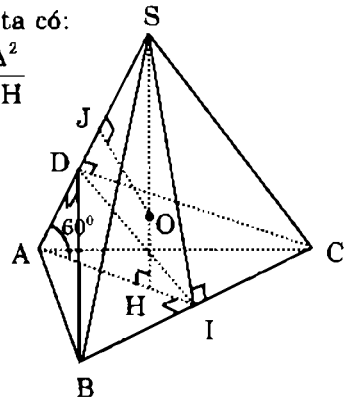
$$SO.SH = SJ.SA \Rightarrow SO = \frac{SJ.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}$$

Tam giác SHA là nửa tam giác đều

$$\text{nên } SA = 2AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \text{ và } SH = a.$$

Suy ra bán kính của mặt cầu ngoại tiếp S.ABC là:

$$R = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2a} = \frac{2a}{3}$$



Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

$$S_{m/c} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{4a^2}{9} = \frac{16\pi a^2}{9}.$$

- b) Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) chia khối chóp S.ABC thành hai khối tứ diện S.DBC và D.ABC.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp \text{mp}(SAI), SA \perp \text{mp}(BCD) \Rightarrow SA \perp DI.$$

$$\text{Như vậy } \triangle DAI \text{ là nửa tam giác đều, suy ra } AD = \frac{1}{2} AI = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } SD = SA - AD = \frac{5a\sqrt{3}}{12} \text{ và } \frac{SD}{SA} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.DBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SA} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Mà } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SH, \text{ trong đó } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ và } SH = a.$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy: } V_{S.DBC} = \frac{5}{8} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{96}. \text{ Suy ra } V_{D.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}.$$

ĐỀ 11

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - (m + 2)x^2 + (m - 1)x + 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 1$.
2. Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x$.
2. Với giá trị nào của m thì bất phương trình sau đây có nghiệm?

$$x - m \leq 2\sqrt{x+2}.$$

Câu 3.

1. Tính $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$.
2. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục hoành:

$$y = \frac{x}{x+1}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(2; 1; 0)$, $B(1; 1; 3)$, $C(2; -1; 3)$, $D(1; -1; 0)$.

1. Chứng minh rằng tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau.
2. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.
3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Câu 5.

1. Giải bất phương trình:

$$2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}.$$

2. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của B'C' và C'D'. Mặt phẳng (AMN) chia khối lập phương đó thành hai khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

Giải

1. Khi $m = 1$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
(độc giả tự giải)

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$x^3 - (m + 2)x^2 + (m - 1)x + 2 = 0 \quad (*)$$

Giả sử đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $M_1(x_1; 0)$, $M_2(x_2; 0)$, $M_3(x_3; 0)$ với x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Hiển nhiên x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình $(*)$, nên phương trình của hàm số có thể viết dưới dạng:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\Leftrightarrow y = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3.$$

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

Đạo hàm cấp hai $y'' = 6x - 2(x_1 + x_2 + x_3)$

Vì x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$

Do đó $y'' = 6x - 6x_2 = 6(x - x_2)$.

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x - x_2 = 0 \Leftrightarrow x = x_2.$$

Như vậy điểm $M_2(x_2; 0)$ là điểm có hoành độ x_2 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

Áp dụng với hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 + (m-1)x + 2$

$$y' = 3x^2 - 2(m+2)x + m - 1$$

$$y'' = 6x - 2(m+2), y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m+2}{3}$$

$$\text{Ta được } x_2 = \frac{m+2}{3} \Rightarrow y_2 = -(m-1)(2m^2 + 5m + 20)$$

Như vậy ta phải có:

$$y_2 = 0 \Leftrightarrow -(m-1)(2m^2 + 5m + 20) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ 2m^2 + 5m + 20 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Với $m = 1$, phương trình (*) trở thành:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Rõ ràng các nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m = 1$.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm 2x + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3} \text{ (họ } k\pi \text{ là họ con của } k\frac{\pi}{3})$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x = k\frac{\pi}{3}$.

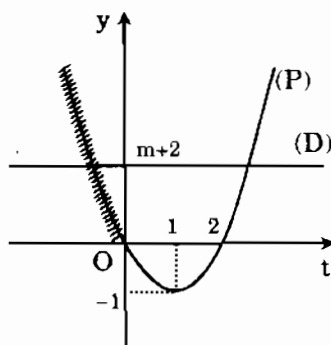
2. Xét bất phương trình $x - m \leq 2\sqrt{x+2}$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x+2} \geq 0$. Suy ra $x = t^2 - 2$

Ta được bất phương trình:

$$t^2 - 2t \leq m + 2 \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

Như vậy ta đi tìm m để bất phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$.



Gọi (P) là cung parabol có phương trình $y = t^2 - 2t$ ($t \geq 0$) và (D) là đường thẳng $y = m + 2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy bất phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$ khi và chỉ khi:

$$m + 2 \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -3.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \geq -3$.

Câu 3.

1. Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \frac{1}{4} \int (3 + \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(3x + \frac{\sin 4x}{4} \right) + C = \frac{1}{16} (12x + \sin 4x) + C$$

2. Ta có

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$V = \pi \left(x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi(3 - 4\ln 2)}{2} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4. A(2; 1; 0), B(1; 1; 3), C(2; -1; 3), D(1; -1; 0).

1. Ta dễ tính được $AB = CD = \sqrt{10}$, $AC = BD = \sqrt{13}$, $AD = BC = \sqrt{5}$

Vậy tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau.

2. Qua kết quả câu (1), ta thấy ABCD là một tứ diện gần đều. Do đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện là trọng tâm G của tứ diện này.

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là $G\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$, bán kính là

$$R = GA = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

3. Vì ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nếu gọi I, J là trung điểm của AB và CD thì IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Ta có $I\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$, $J\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{3}{2}\right)$. Vậy khoảng cách giữa AB và CD là $d = IJ = 2$.

Câu 5.

1. Xét bất phương trình:

$$2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 16 \cdot 2^{2x-5} + 4 \cdot 2^{2x-5} - 2^{2x-5} > 16 \cdot 2^{3-x} + 4 \cdot 2^{3-x} - 2^{3-x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-5} > 2^{3-x}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 > 3 - x$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{8}{3}.$$

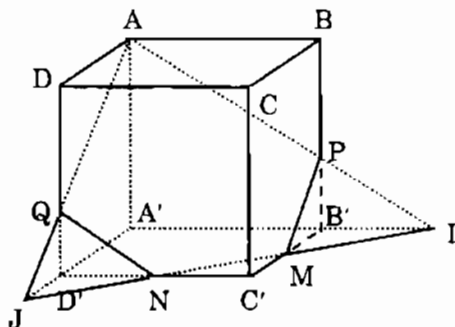
2. Trong mặt phẳng $ABB'A'$, gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AP và $A'B'$.

Trong mặt phẳng $ADD'A'$, gọi J là giao điểm của hai đường thẳng AQ và $A'D'$.

Tam giác $B'MI$ vuông cân tại B' ($\widehat{MB'I} = 90^\circ$, $\widehat{B'MI} = \widehat{C'MN} = 45^\circ$)

Suy ra $IB' = \frac{a}{2}$. Tương tự $JD' = \frac{a}{2}$.

Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A' và V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại.



Ta có $V_1 = V_{A'IJA'} - (V_{B'MIP} + V_{D'NJQ})$. (*)

$$\bullet V_{A'IJA'} = \frac{1}{6} A'A \cdot A'I \cdot A'J = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^3}{24} = \frac{3a^3}{8}$$

• Hai khối tứ diện $B'MIP$ và $A'IJA'$ đồng dạng, tỉ số đồng dạng $k = \frac{IB'}{IA'} = \frac{1}{3}$

$$\text{Do đó } V_{B'MIP} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot V_{A'IJA'} = \frac{1}{27} \cdot \frac{3a^3}{8} = \frac{a^3}{72}$$

$$\text{Tương tự } V_{A'IJA'} = \frac{a^3}{72}$$

$$\text{Thế vào (*) ta được } V_1 = \frac{3a^3}{8} - 2 \cdot \frac{a^3}{72} = \frac{25a^3}{72}$$

$$\text{Suy ra } V_2 = a^3 - V_1 = \frac{47a^3}{72}$$

ĐỀ 12

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 0$.
2. Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$.
2. Lập bảng biến thiên, từ đó suy ra tập giá trị của hàm số sau

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - x.$$

Câu 3.

1. Tính $\int (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$.

2. Tính thể tích của khối tròn xoay, khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục hoành:

$$y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(2; -4; 6). Gọi B, C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz.

1. Tính thể tích của khối tứ diện OBCD.
2. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 5\vec{MA}$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD. Chứng minh ba điểm A, G, M thẳng hàng.
3. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Chứng tỏ rằng mặt cầu này đi qua gốc tọa độ O.

Câu 5.

1. Giải phương trình:

$$3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0.$$

2. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm của A'B', N là trung điểm của BC.

- a) Tính thể tích khối tứ diện ABMN.
- b) Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó.

Giải

Câu 1.

1. Khi $m = 0$, phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 - 3x + 1$.

(độc giả tự giải)

2. Gọi $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1)$

Đạo hàm $f'(x) = 3(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1$

Ta dễ suy ra hàm số đạt cực đại tại

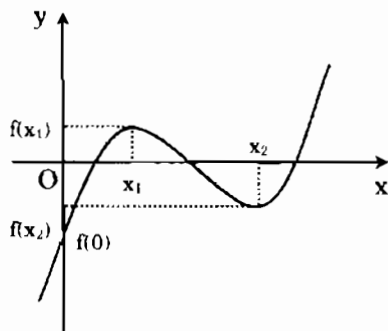
$x_1 = m - 1$ và đạt cực tiểu tại $x_2 = m + 1$.

Suy ra $f(x_1) = (m - 1)(m^2 - 3)$,

$$f(x_2) = (m + 1)(m^2 - 2m - 1)$$

Kết hợp với hệ số bậc ba là $a = 1$ của hàm số, ta thấy điều kiện để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương là:

$$\begin{cases} x_1 = m - 1 > 0 \\ x_2 = m + 1 > 0 \\ f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \\ f(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > -1 \\ (m^2 - 1)(m^2 - 3)(m^2 - 2m - 1) < 0 \\ -(m^2 - 1) < 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$$

Vậy $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$

Câu 2. 1. Xét phương trình $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x = 2\sin 3x \cos 3x \Leftrightarrow \sin 3x(\cos 3x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos 3x = \cos x \end{cases}$$

$$\bullet \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = k \frac{\pi}{3}$$

$$\bullet \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + m2\pi \\ 3x = -x + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ x = m \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = m \frac{\pi}{2} \text{ (họ } m\pi \text{ là họ con của } m \frac{\pi}{2} \text{)}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = k \frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ($k, m \in \mathbb{Z}$)

2. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} - x$

Tập xác định: $D = (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} - 1 = \frac{x-2-\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{x^2-4x+3}} \quad (x < 1 \text{ hoặc } x > 3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 \end{cases}$$

Nhận thấy hệ phương trình trên vô nghiệm, nên y' có một dấu không đổi trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$

$$\bullet y'(0) = \frac{-2}{\sqrt{3}} - 1 < 0 \Rightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$$

$$\bullet y'(4) = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 > 0 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = -2 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x) = +\infty$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
y'		-		+	
y	$+\infty$				-2
			-1	-3	

Từ bảng ta suy ra tập giá trị của hàm số là: $T = [-3; -2) \cup [-1; +\infty)$

Câu 3.

$$1. \text{ Ta có: } \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5 + 3\cos 4x}{8}$$

$$\int (\sin^6 x + \cos^6 x) dx = \frac{1}{8} \int (5 + 3\cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(5x + \frac{3\sin 4x}{4} \right) + C \\ = \frac{1}{32} (20x + 3\sin 4x) + C$$

$$2. \text{ Ta có } V = \pi \int_0^e \ln^2 x dx$$

$$\text{Tính } \int_0^e \ln^2 x dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln^2 x, dv = dx, \text{ ta được } du = \frac{2\ln x dx}{x}, v = x$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần:

$$\int_0^e \ln^2 x dx = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx$$

$$\text{Tính } \int_1^e \ln x dx$$

$$\text{Đặt } u_1 = \ln x, dv_1 = dx, \text{ ta được } du_1 = \frac{dx}{x}, v_1 = x$$

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = 1$$

$$\text{Suy ra } \int_1^e \ln^2 x dx = e - 2.$$

$$\text{Vậy: } V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi(e - 2) \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4.

1. Vì B, C, D là hình chiếu vuông góc của A(2; -4; 6) trên Ox, Oy, Oz nên ta có B(2; 0; 0), C(0; -4; 0), D(0; 0; 6).

Do OB, OC, OD vuông góc từng đôi một nên thể tích khối tứ diện OBCD là

$$V = \frac{1}{6} OB \cdot OC \cdot OD = \frac{1}{6} \cdot |2| \cdot |-4| \cdot |6| = 8.$$

2. * Gọi M(x; y; z), ta có:

$$\bullet \overrightarrow{MB} = (2 - x; -y; -z), \overrightarrow{MC} = (-x, -4 - y; -z), \overrightarrow{MD} = (-x; -y; 6 - z).$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (2 - 3x; -4 - 3y; 6 - 3z)$$

$$\bullet \overrightarrow{MA} = (2 - x; -4 - y; 6 - z) \Rightarrow 5\overrightarrow{MA} = (10 - 5x; -20 - 5y; 30 - 5z).$$

Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 - 3x = 10 - 5x \\ -4 - y = -20 - 5y \\ 6 - 3z = 30 - 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -8 \\ z = 12 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $M(4; -8; 12)$.

* Chứng minh ba điểm A, G, M thẳng hàng.

Với G là trọng tâm của tứ diện ABCD ta dễ dàng tìm được $G(1; -2; 3)$.

Ta có: $\vec{AM} = (2; -4; 6)$, $\vec{AG} = (-1; 2; -3)$. Suy ra $\vec{AM} = -2\vec{AG}$

Hệ thức trên chứng tỏ ba điểm A, G, M thẳng hàng.

3. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD thì $AI = BI = CI = DI$.

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \\ AI = DI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + (b+4)^2 + (c-6)^2 = (a-2)^2 + b^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + (b+4)^2 + (c-6)^2 = a^2 + (b+4)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + (b+4)^2 + (c-6)^2 = a^2 + b^2 + (c-6)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 3c + 13 = 0 \\ -a - 3c + 10 = 0 \\ -a + 2b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm $I(1; -2; 3)$ và có bán kính là $R = IA = \sqrt{14}$. Mặt khác ta cũng có $IO = \sqrt{14}$ nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD đi qua gốc tọa độ O.

Câu 5. 1. Xét phương trình

$$3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0 \quad (1)$$

Điều kiện: $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq \frac{1}{16}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4x} + \frac{3}{\log_4 16x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{1 + \log_4 x} + \frac{3}{2 + \log_4 x} = 0$$

Đặt $t = \log_4 x$, ta được phương trình:

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{1+t} + \frac{3}{2+t} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 8t + 3 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{3}{2}$

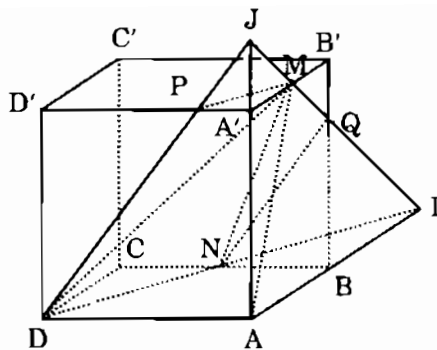
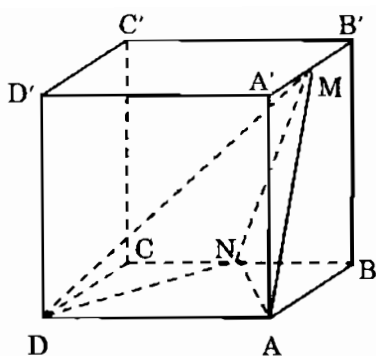
$$\bullet t_1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_4 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\bullet t_2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_4 x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{8}$.

2. a) Tính thể tích khối tứ diện ADMN:

$$\text{Ta có } V_{ADMN} = V_{M.AND} = \frac{1}{3} S_{AND} \cdot d(M, (ABCD)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$



b) Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện:

Trong mặt phẳng (ABCD), gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB và DN.

Ta có $\frac{IB}{IA} = \frac{BN}{AD} = \frac{1}{2}$. Suy ra B là trung điểm của AI, do đó $BI = a$.

Trong mặt phẳng (ABA'B'), gọi J và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MI với hai đường thẳng AA' và BB'. Trong mặt phẳng ADD'A' gọi P là giao điểm của DJ và A'D'. Như vậy ngũ giác DNQMP là thiết diện của lập phương ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (DMN).

$$\bullet BI \parallel MB' \Rightarrow \frac{QB'}{QB} = \frac{MB'}{BI} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } BQ = \frac{2a}{3}$$

$$\bullet A'M \parallel AI \Rightarrow \frac{JA'}{JA} = \frac{A'M}{AI} = \frac{1}{4}. \text{ Suy ra } JA' = \frac{a}{3}, A'P = \frac{a}{4}$$

Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa điểm A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại.

$$\text{Ta có: } V_1 = V_{J.ADI} - [V_{Q.BNI} + V_{J.A'MP}]$$

$$+ V_{J.ADI} = \frac{1}{6} AD \cdot AI \cdot AJ = \frac{1}{6} \cdot a \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} = \frac{4a^3}{9}$$

$$+ V_{Q.BNI} = \frac{1}{6} BI \cdot BN \cdot BQ = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{18}$$

$$+ V_{J.A'MP} = \frac{1}{6} \cdot A'M \cdot A'P \cdot A'J = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{144}$$

$$\text{Do đó } V_1 = \frac{4a^3}{9} - \left(\frac{a^3}{18} + \frac{a^3}{144} \right) = \frac{55a^3}{144}. \text{ Suy ra } V_2 = \frac{89a^3}{144}$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{55}{89}.$$

ĐỀ 13

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x$.
2. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng $\Delta: y = mx - m + 2$ luôn đi qua một điểm cố định I nằm trên (C).
3. Với giá trị nào của m thì đường thẳng Δ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$.
2. Lập bảng biến thiên, từ đó suy ra tập giá trị của hàm số sau

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Câu 3.

1. Tính $\int \cos x \cos 2x \cos 4x dx$.
2. Tính thể tích của khối tròn xoay, khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục hoành:

$$y = x^2 \text{ và } y = 2x$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp ABCD.MNPQ với A(0; 1; 1), B(0; 2; 3), C(2; 4; 2) và M(1; 2; 5).

1. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
2. Tính diện tích mặt chéo BDQN của hình hộp.
3. Tính thể tích của khối hộp ABCD.MNPQ.

Câu 5.

1. Giải phương trình: $2\log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$
2. Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a.
 - a) Tính thể tích V của khối chóp.
 - b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại E và F. Tính độ dài các đoạn thẳng EB, FD.
 - c) Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x$
(độc giả tự giải)
2. Phương trình của đường thẳng Δ có thể viết $m(x - 1) = y - 2$.
Phương trình trên nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định $I(1; 2)$. Dễ thấy điểm $I(1; 2)$ thuộc đồ thị (C).

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ :

$$2x^3 - 6x^2 + 6x = mx - m + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + (6 - m)x + m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - 4x + 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = 2x^2 - 4x + 2 - m = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Biệt thức của (2): $\Delta' = 2m$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là:

$$\begin{cases} \Delta' = 2m > 0 \\ g(1) = -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Vậy khi $m > 0$ thì đường thẳng Δ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B với $I(1; 2)$. Như thế hoành độ x_A, x_B của A và B là các nghiệm của phương trình (2).

$$\text{Ta có: } x_A + x_B = 2 \Rightarrow \frac{x_A + x_B}{2} = 1 = x_I.$$

Vậy khi $m > 0$ thì $I(1; 2)$ luôn là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 8x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 4x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 7x \cos x = 2\cos 3x \cos x \Leftrightarrow \cos x (\cos 7x - \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 7x = \cos 3x \end{cases}$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet \cos 7x = \cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 3x + m2\pi \\ 7x = -3x + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\frac{\pi}{2} \\ x = m\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = m\frac{\pi}{2}$ và $x = m\frac{\pi}{5} \quad (m \in \mathbb{Z})$.

2. Xét hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Vì $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\sqrt{x^2 - x + 1}$ luôn có nghĩa

Do đó ta cần có điều kiện:

$$x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x \quad (1)$$

Nếu $x \geq 0$ thì (1) hiển nhiên đúng.

Nếu $x < 0$ thì $-x > 0$, ta có

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geq x^2 \Leftrightarrow x \leq 1. \text{ Suy ra } x < 0.$$

Suy ra biểu thức $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ luôn có nghĩa với mọi x , nên hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số có đạo hàm:

$$y' = \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x - 1}{4\sqrt{x^2 - x + 1} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}}$$

Ta xét phương trình:

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ 4(x^2 - x + 1) = (1 - 2x)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nhận thấy hệ phương trình trên vô nghiệm, do đó y' luôn có một dấu không đổi.

Mà $y'(0) = \frac{1}{4} > 0$, nên $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$

Vậy hàm số có tập giá trị là $T = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right)$.

Câu 3.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } \cos x \cos 2x \cos 4x &= \frac{1}{2} \cos x (\cos 6x + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} [\cos 6x \cos x + \cos 2x \cos x] \\ &= \frac{1}{4} (\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x + \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos x \cos 2x \cos 4x dx &= \frac{1}{4} \int (\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x + \cos x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 3x}{3} + \sin x \right) + C\end{aligned}$$

2. $y = x^2$ và $y = 2x$

Ta có: $x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

$$V = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \frac{4\pi}{3} x^3 \Big|_0^2 - \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^2$$

$$V = \frac{64\pi}{15} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4. Hình hộp ABCD.MNPQ với A(0; 1; 1), B(0; 2; 3), C(2; 4; 2) và M(1; 2; 5).

1. * ABCD là hình bình hành nên ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 0 = 2 \\ y_D - 1 = 2 \\ z_D - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 3 \\ z_D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow D(2; 3; 0)$$

* $\overrightarrow{BN} = (x_N; y_N - 2; z_N - 3)$, $\overrightarrow{AM} = (1; 1; 4)$. Từ $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM}$ suy ra N(1; 3; 7).

Tính tương tự ta được: P(3; 5; 6), Q(3; 4; 4).

2. Ta có: $\overrightarrow{BN} = (1; 1; 4)$, $\overrightarrow{BD} = (2; 1; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BD}] = (-7; 11; -1)$.

$$\text{Suy ra } S_{BDQN} = |[\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BD}]| = \sqrt{171}$$

3. Gọi V là thể tích khối hộp ABCD.MNPQ:

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (-5; 4; -2), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AM} = -9$$

$$\text{Vậy } V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AM}| = 9.$$

Câu 5.

1. Xét phương trình

$$2\log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1) \quad (1)$$

Điều kiện: $x > 0$

Với điều kiện đó, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \log_3^2 x = 2\log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1) \Leftrightarrow \log_3 x (\log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1} - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1} - 1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1} - 1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\bullet \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet (3) \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)^2 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2x+1} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (vì } x > 0)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 1, x = 4$.

2. a) Kẻ đường cao SH. Vì S.ABCD là hình chóp đều nên H trùng với tâm của đáy ABCD.

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3} \cdot S_{(ABCD)} \cdot SH$$

- $S_{(ABCD)} = a^2$.

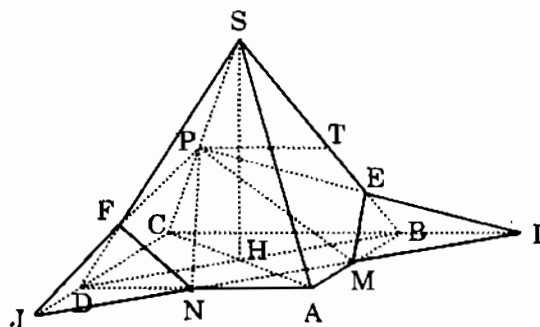
- Tam giác SHA vuông tại H cho:

$$SH^2 = SA^2 - HA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

b) Đường thẳng MN cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại I và J. Nhận thấy các tam giác vuông cân BMI, AMN, DNJ bằng nhau.



$$\text{Suy ra } DJ = BI = AM = \frac{a}{2}$$

Trong ΔSBC kẻ đoạn thẳng PT song song với BC ($T \in SB$). Ta thấy hai tam giác PTE và BEI bằng nhau. Suy ra $ET = EB = \frac{SB}{4} = \frac{a}{4}$

$$\text{Chứng minh tương tự } FD = \frac{a}{4}.$$

c) Gọi chiều cao của khối chóp S.ABCD là h.

Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần, gọi V_1 là phần chứa điểm C và V_2 là thể tích của phần còn lại.

$$\text{Vì P là trung điểm của SC nên } d(P, ABCD) = \frac{1}{2} d(S, ABCD) = \frac{h}{2}.$$

$$\text{Vì } FD = \frac{1}{4} SD \text{ nên } d(F, ABCD) = \frac{1}{4} d(S, ABCD) = \frac{h}{4}.$$

Để ý rằng $V_{F,DNJ} = V_{E,BMI}$. Từ các kết quả trên ta có:

$$V_1 = V_{P,CIJ} - 2V_{F,DNJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} CI^2 \cdot \frac{h}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} DN \cdot DJ\right) \cdot \frac{h}{4}$$

$$V_1 = \frac{1}{12} \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \cdot h - \frac{1}{12} \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot h = \frac{1}{6} a^2 h = \frac{V}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Suy ra } V_2 = \frac{V}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Vậy } V_1 = V_2.$$

ĐỀ 14

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x$.
2. Một đường thẳng (D) đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc bằng m. Với giá trị nào của m thì (D) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.
3. Trong điều kiện của câu 2), hãy xác định giá trị của m để hình phẳng giới hạn bởi (D) và (C) có diện tích bằng 8.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.
2. Tùy theo m hãy xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y = \frac{(m+1)x + m + 3}{mx + 2}$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường
 $y = e^x, y = e^{-x}, x = -1, x = 1$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 3). Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên ba mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Ozx).

1. Tính diện tích của tam giác MNP.
2. Viết phương trình của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OMNP.
3. Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Câu 5.

1. Giải phương trình: $\log_{\sqrt{x}} 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$
2. Cho tứ diện ABCD. Trong miền tam giác ABC lấy điểm M, các đường thẳng qua M song song với AD, BD, CD lần lượt cắt các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD) tại A', B', C'.
 - a) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng DA' và BC. Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.
 - b) Chứng minh rằng tổng số $\frac{MA'}{AD} + \frac{MB'}{BD} + \frac{MC'}{CD}$ bằng một hằng số.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = x^3 - 3x$.
(độc giả tự giải)
2. Đường thẳng (D) đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc bằng m nên có phương trình $y = mx$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D):

$$x^3 - 3x = mx \Leftrightarrow x(x^2 - m - 3) = 0 \text{ (a)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 3 \text{ (b)} \end{cases}$$

Đường thẳng (D) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (a) có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là:

$$m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3.$$

Vậy nếu $m > -3$ thì (D) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

3. Với điều kiện $m > -3$ thì phương trình (a) có ba nghiệm phân biệt là

$$x_1 = -\sqrt{m+3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{m+3}.$$

Do đồ thị (C) nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và đường thẳng (D) đi qua O nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (D):

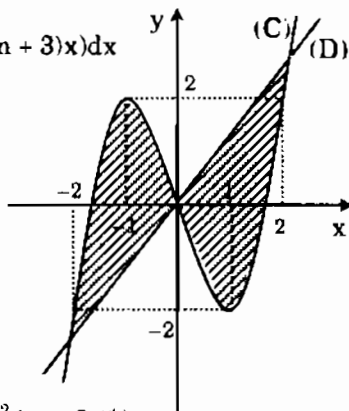
$$S = 2 \int_0^{\sqrt{m+3}} (mx - (x^3 - 3x)) dx = 2 \int_0^{\sqrt{m+3}} (-x^3 + (m+3)x) dx$$

$$S = 2 \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{(m+3)x^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{m+3}} = \frac{1}{2} (m+3)^2$$

Theo giả thiết ta có phương trình:

$$\frac{1}{2} (m+3)^2 = 8 \Leftrightarrow (m+3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -7 \text{ (loại)} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 1.$$



Câu 2.

1. Xét phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (\cos 7x + \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \cos 7x = -\cos 3x \end{cases}$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\bullet \cos 7x = -\cos 3x \Leftrightarrow \cos 7x = \cos(\pi - 3x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \pi - 3x + m2\pi \\ 7x = 3x - \pi + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + m\frac{\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{10} + m\frac{\pi}{5}, x = -\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

2. Xét hàm số $y = \frac{(m+1)x + m + 3}{mx + 2}$

Với $m = 0$ hàm số trở thành $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$. Hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m \neq 0$, hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{m} \right\}$

Ta có $y' = \frac{-m^2 - m + 2}{(mx + 2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -2$.

Ta có bảng xét dấu y' theo như sau:

m	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	

- Nếu $m = -2$ thì hàm số trở thành hàm số hằng $y = \frac{1}{2}$ ($x \neq 1$)
- Nếu $m = 1$ thì hàm số trở thành hàm số hằng $y = 2$ ($x \neq -2$)
- Nếu $-2 < m < 1$ thì $y' > 0$, $\forall x \neq -\frac{2}{m}$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\frac{2}{m})$, $(-\frac{2}{m}; +\infty)$.
- Nếu $m < -2$ hoặc $m > 1$ thì $y' < 0$, $\forall x \neq -\frac{2}{m}$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\frac{2}{m})$, $(-\frac{2}{m}; +\infty)$.

Câu 3.

1. Ta có: $\int_0^1 \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 x(\sqrt{x^2 + 1} - x) dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx - \int_0^1 x^2 dx$

• $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

• Tính $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 1 \Rightarrow x dx = t dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = 1$ và khi $x = 1$ thì $t = \sqrt{2}$

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot t dt = \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Vậy $\int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 2)$

2. Gọi $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ và $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - e^{-x}$
 $h(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$.

Diện tích của hình phẳng:

$$S = \left| \int_1^0 (e^x - e^{-x}) dx \right| + \left| \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx \right|$$

$$S = \left| (e^x + e^{-x}) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| (e^x + e^{-x}) \Big|_0^1 \right| = 2 \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right)$$

Câu 4.

1. Hình chiếu vuông góc của $A(1; 2; 3)$ trên ba mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) là $M(1; 2; 0)$, $N(0; 2; 3)$, $P(1; 0; 3)$.

Ta có: $\overline{MN} = (-1; 0; 3)$, $\overline{MP} = (0; -2; 3)$. Suy ra $[\overline{MN}, \overline{MP}] = (6; 3; 2)$

Diện tích ΔMNP là $S_{\Delta MNP} = \frac{7}{2}$

2. Phương trình của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OMNP$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

Do (S) đi qua O, M, N, P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 5 + 2a + 4b = 0 \\ 13 + 4b + 6c = 0 \\ 10 + 2a + 6c = 0 \end{cases}$$

Giải được $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = -\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 3z = 0$$

3. Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Gọi (T) là đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP , tâm J của (T) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (MNP) .

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) : $\vec{n} = [\overline{MN}, \overline{MP}] = (6; 3; 2)$

Phương trình của mặt phẳng (MNP) :

$$6(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$$

Phương trình của đường thẳng Δ qua I vuông góc với $mp(MNP)$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 6t \\ y = 1 + 3t \\ z = \frac{3}{2} + 2t \end{cases}$$

Điểm J là giao điểm của Δ và $mp(MNP)$, nên tọa độ của J ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$6\left(\frac{1}{2} + 6t\right) + 3(1 + 3t) + 2\left(\frac{3}{2} + 2t\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow 49t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{49}$$

Suy ra $J\left(\frac{85}{98}; \frac{58}{98}; \frac{159}{98}\right)$

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (MNP) :

$$d = d(I, (MNP)) = \frac{\left|6 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 12\right|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn (T): } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{14}{4} - \frac{9}{49}} = \frac{5\sqrt{26}}{14}$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $\log_{\sqrt{x}} 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$ (*)

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$

Với điều kiện đó, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 12\log_2 2 - \log_2 x = 2\log_2 x \Leftrightarrow \frac{12}{\log_2 x} - 3\log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2. a) Từ giả thiết suy ra N nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (AA'D) và (ABC)

Mặt khác $M \in (ABC), MA' \parallel AD$

$\Rightarrow M \in (AA'D)$

Đi nhiên A cũng nằm trên giao tuyến của (AA'D) và (ABC).

Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

- b) Gọi H, H' là hình chiếu vuông góc của A, M trên mp(BCD).

Hiển nhiên ba điểm N, H, H' thẳng hàng. Và $AH \parallel MH'$.

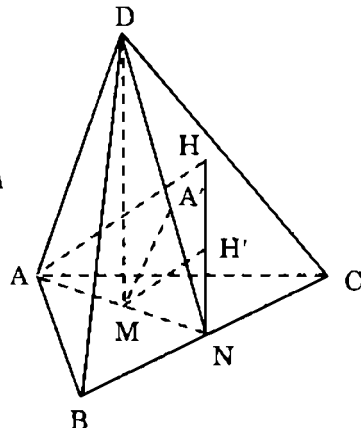
Gọi V, V₁, V₂, V₃ lần lượt là thể tích của các khối tứ diện ABCD, MBCD, MACD, MABD. Ta có:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}S_{(BCD)} \cdot MH'}{\frac{1}{3}S_{(BCD)} \cdot AH} = \frac{MH'}{AH} = \frac{NM}{NA} = \frac{MA'}{AD}$$

Chứng minh tương tự: $\frac{V_2}{V} = \frac{MB'}{BD}, \frac{V_3}{V} = \frac{MC'}{CD}$

Do đó: $\frac{MA'}{AD} + \frac{MB'}{BD} + \frac{MC'}{CD} = \frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_3}{V} = 1$ (hằng số)

Vậy $\frac{MA'}{AD} + \frac{MB'}{BD} + \frac{MC'}{CD} = 1.$



ĐỀ 15

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - mx + 2m - 1$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

- Với giá trị nào của m thì (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua điểm $A(0; 1)$.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -3$.

Câu 2.

- Giải phương trình $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ (1)
- Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 - 4x + 4} = x^2 - 4x + 3$

Câu 3.

- Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$
- Tính thể tích của khối tròn xoay, khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục tung:
 $y = 4x - x^2$ và $y = 0$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$.

- Tính diện tích của tam giác ABC.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành.
- Tính thể tích khối chóp S.ABCD với $S(0; 3; 4)$.

Câu 5.

- Giải phương trình $5^x \cdot 2^{\frac{2x+1}{x-2}} = 10$
- Cho tứ diện ABCD và điểm M nằm bên trong tứ diện. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt các mặt đối diện lần lượt tại các điểm A', B', C', D'.
a) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1$
b) Xác định vị trí của điểm M để $\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} + \frac{MD}{MD'}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

- Giả sử đồ thị (C_m) có hai điểm phân biệt $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ đối xứng với nhau qua điểm $A(0; 1)$. Suy ra $M_2(-x_2; 2 - y_1)$. (điều kiện $x_1 \neq 0$)

Vì M_1 và M_2 thuộc (C_m) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 + mx_1^2 - mx_1 + 2m - 1 & (1) \\ 2 - y_1 = -x_1^3 + mx_1^2 + mx_1 + 2m - 1 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) ta được:

$$2mx_1^2 + 4m - 2 = 2 \Leftrightarrow mx_1^2 = 2 - 2m (*)$$

Bài toán tương đương với, tìm giá trị của m để phương trình (*) có nghiệm x_1 khác 0.

Phương trình (*) có nghiệm khác 0 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 2 - 2m \neq 0 \\ \frac{2 - 2m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ 0 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Vậy: $0 < m < 1$.

2. Khi $m = -3$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$ (đọc giả tự giải).

Câu 2.

1. Phương trình $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Đặt $t = \tan x$, phương trình đã cho trở thành:

$$(1 - t) \left(1 + \frac{2t}{1 + t^2} \right) = 1 + t \Leftrightarrow (1 - t)(t^2 + 2t + 1) = (1 + t)(1 + t^2)$$

$$\Leftrightarrow t^2(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 - 4x + 4} = x^2 - 4x + 3$.

Ghi chú: Để giải bài toán trên, ta dựa vào tính đơn điệu của hàm số như sau:

Giả sử $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên tập $\mathcal{D}$, khi đó:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Nhận thấy $x^2 + 1 > 0$ và $2x^2 - 4x + 4 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$.

Đặt $b = x^2 + 1 > 0$, $a = 2x^2 - 4x + 4 > 0$ thì $a - b = x^2 - 4x + 3$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} + a = \sqrt{b} + b$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} + t$, với $t \in (0; +\infty)$

Suy ra $f(a) = \sqrt{a} + a$ và $f(b) = \sqrt{b} + b$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{a} + a &= \sqrt{b} + b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \\ \Leftrightarrow a - b &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.\end{aligned}$$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

Câu 3.

1. Ta có: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx = \int_0^1 x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx = \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx - \int_0^1 x\sqrt{x} dx$

$$\bullet \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$\bullet \text{ Tính } \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt.$$

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } t = 1 \text{ và khi } x = 1 \text{ thì } t = \sqrt{2}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)t \cdot t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{116}{15}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx = \frac{2(2\sqrt{2} - 1)}{15}.$$

2. Parabol $y = 4x - x^2$ có đỉnh $I(2; 4)$, cắt trục hoành tại hai điểm là gốc tọa độ O và điểm $A(4; 0)$.

$$y = 4x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{4-y} \\ x = 2 - \sqrt{4-y} \end{cases} \quad (0 \leq y \leq 4)$$

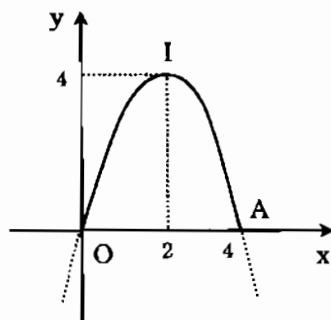
Nếu chọn y làm biến thì:

$$\text{Cung } \widehat{OI} \text{ có phương trình } x = 2 - \sqrt{4-y}$$

$$\text{Cung } \widehat{IA} \text{ có phương trình } x = 2 + \sqrt{4-y}$$

Thể tích của vật thể tròn xoay là:

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 \left[(2 + \sqrt{4-y})^2 - (2 - \sqrt{4-y})^2 \right] dy \\ &= 8\pi \int_0^4 \sqrt{4-y} dy = \frac{128\pi}{3} \text{ (đvtt)}\end{aligned}$$



Câu 4. $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$.

1. Ta có: $\overline{AB} = (-1; 0; 1)$, $\overline{AC} = (1; 1; 1)$. Suy ra $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (-1; 2; -1)$

$$\text{Diện tích tam giác ABC là: } S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2. Nếu tứ giác ABCD là một hình bình hành thì ta có $\overline{AD} = \overline{BC}$. Gọi $D(x; y; z)$.

$$\text{Ta có: } \overline{AD} = (x - 1; y; z), \overline{BC} = (2; 1; 0)$$

$$\text{Do đó: } \overline{AD} = \overline{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Vậy $D(3; 1; 0)$

3. Gọi B là thể tích khối chóp $S.ABCD$ thì ta có:

$$V = 2V_{SABC} = \frac{1}{3} [[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AS}] (*)$$

Mà $\overline{AB} = (-1; 0; 1)$, $\overline{AC} = (1; 1; 1)$, $\overline{AS} = (-1; 3; 4)$

nên $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (-1; 2; -1)$ và $[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AS} = 3$.

Thế vào (*) ta được $V = 1$.

Câu 5.

1. Giải phương trình $5^x \cdot 2^{\frac{2x+1}{x+2}} = 10$

Điều kiện $x \neq -2$.

Vì hai vế đều dương, nên lấy lôgarit thập phân hai vế ta được:

$$x \cdot \lg 5 + \frac{2x+1}{x+2} \cdot \lg 2 = 1 \Leftrightarrow x(x+2)(1 - \lg 2) + (2x+1)\lg 2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \lg 2)x^2 + x + \lg 2 - 2 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{\lg 2 - 2}{1 - \lg 2}$$

2. a) Gọi V, V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABCD, MBDC, MACD, MABD, MABC$.

Gọi H, H_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và M trên $mp(BCD)$, dễ thấy các điểm A', H, H_1 thẳng hàng và $AH \parallel MH_1$, nên $\frac{MH_1}{AH} = \frac{A'M}{A'A}$

$$\text{Ta có: } \frac{V_1}{V} = \frac{MH_1}{AH} = \frac{A'M}{A'A} \text{ hay } \frac{V_1}{V} = \frac{MA'}{AA'}$$

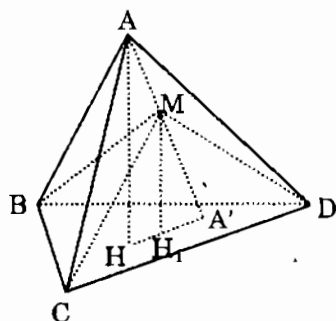
$$\text{Lập luận tương tự: } \frac{V_2}{V} = \frac{MB'}{BB'}, \frac{V_3}{V} = \frac{MC'}{CC'}, \frac{V_4}{V} = \frac{MD'}{DD'}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} &= \frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_3}{V} + \frac{V_4}{V} \\ &= \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V} = \frac{V}{V} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} = 1$$

b) Gọi $k = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} + \frac{MD}{MD'}$

$$\text{Và } a = \frac{MA'}{AA'}, b = \frac{MB'}{BB'}, c = \frac{MC'}{CC'}, d = \frac{MD'}{DD'}$$



Suy ra $a + b + c + d = 1$

Ta có thể viết:

$$k = \left(\frac{AA'}{MA'} - 1 \right) + \left(\frac{BB'}{MB'} - 1 \right) + \left(\frac{CC'}{MC'} - 1 \right) + \left(\frac{DD'}{MD'} - 1 \right) \\ = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} - 4$$

Do đó, k đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\alpha = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd} \quad \text{và} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 4\frac{1}{\sqrt[4]{abcd}}$$

$$\text{Suy ra: } (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 16.$$

Từ đó: $k \geq 12$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Khi đó $\frac{MA}{AA'} = \frac{MB}{BB'} = \frac{MC}{CC'} = \frac{MD}{DD'} = \frac{3}{4} \Rightarrow M$ là trọng tâm của tứ diện ABCD.

Vậy: $\min k = 12$, xảy ra khi M là trọng tâm của tứ diện ABCD.

ĐỀ 16

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m + 1)$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định.
2. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1?
3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cos x$
2. Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là một điểm cực đại.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$
2. Tính thể tích của khối tròn xoay, khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay xung quanh trục hoành:

$$y = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}, y = 0, x = 0, x = \pi.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(-2; 1; -1).

1. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.
2. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.
3. Tính độ dài đường cao của tứ diện ABCD hạ từ A.

Câu 5.

1. Giải phương trình $x^{2x} = 2^x$.
2. Cho hình chóp S.ABCD, G là trọng tâm của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) bất kì cắt SA, SB, SC, SG theo thứ tự tại các điểm A', B', C', G' (khác với S). Chứng minh rằng:

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}$$

Giải

Câu 1.

1. Phương trình của hàm số có thể viết:

$$(2x - 4)m^2 + (-3x^2 + 8x - 4)m + x^3 - 3x^2 + 2x + y = 0$$

Phương trình trên nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ -3x^2 + 8x - 4 = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3} \\ y = -x^3 + 3x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy đồ thị (C_m) luôn đi qua điểm cố định A(2; 0).

2. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) với trục hoành:

$$x^3 - 3(m + 1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(-x + m + 1)(2m - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = m + 1 \\ x = 2m \end{cases}$$

Theo yêu cầu của bài toán, ta cần điều kiện:

$$\begin{cases} m + 1 > 1 \\ 2m > 1 \\ m + 1 \neq 2 \\ 2m \neq 2 \\ 2m \neq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

3. Khi $m = -1$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 - 4x$ (độc giả tự giải)

Câu 2.

1. Giải phương trình $\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cos x$ (*)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \sin 3x \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin 3x \cos 2x \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(1 - \cos 2x \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 1 - \cos 2x \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$$

$$\bullet 1 - \cos 2x \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 2x = m2\pi \Leftrightarrow x = m\pi$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x = k\frac{\pi}{3}$ (họ $m\pi$ là họ con của $k\frac{\pi}{3}$)

($k, m \in \mathbb{Z}$)

2. Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$\text{Gọi } y = f(x) = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

$$\text{Đạo hàm } y' = f'(x) = 5a^2x^2 + 4ax - 9$$

Nếu $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại của hàm số thì ta có:

$$f'\left(-\frac{5}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{125}{81}a^2 - \frac{20}{9}a - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(a = \frac{81}{25} \text{ hoặc } a = -\frac{9}{5}\right)$$

$$\bullet \text{ Nếu } a = \frac{81}{25} \text{ thì } f(x) = \frac{2187}{125}x^3 + \frac{162}{25}x^2 - 9x + b$$

$$\text{và } f'(x) = \frac{6561}{125}x^2 + \frac{324}{25}x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{25}{81} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{9}\right)$$

Lập bảng xét dấu, ta suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -\frac{5}{9}$ và đạt

cực tiểu tại điểm $x = \frac{25}{81}$

$$\text{Ta có: } y_{CT} = f\left(\frac{25}{81}\right) = -\frac{400}{243} + b$$

Để ý rằng, đối với hàm số bậc ba có hai cực trị thì ta luôn có $y_{CB} > y_{CT}$.

Do đó y_{CB} và y_{CT} đều dương khi và chỉ khi:

$$y_{CT} > 0 \Leftrightarrow -\frac{400}{243} + b > 0 > \frac{400}{243}$$

* Nếu $a = -\frac{9}{5}$ thì $f(x) = \frac{27}{5}x^3 - \frac{18}{5}x^2 - 9x + b$

và $f'(x) = \frac{81}{5}x^3 - \frac{36}{5}x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{81}{5}x^3 - \frac{36}{5}x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{9})$$

Lập bảng xét dấu, ta suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -\frac{5}{9}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$

Ta có $y_{CT} = f(1) = -\frac{36}{5} + b$

Do đó y_{CB} và y_{CT} đều dương khi và chỉ khi:

$$y_{CT} > 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{5} + b > 0 \Leftrightarrow b > \frac{36}{5}$$

Vậy: $a = \frac{81}{25}$ và $b > \frac{400}{243}$ hoặc $a = -\frac{9}{5}$ và $b > \frac{36}{5}$.

Câu 3.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| dx \end{aligned}$$

Xét phương trình $\sin x + \cos x = 0$

Ta có: $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx &= \left| \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\sin x + \cos x) dx \right| \\ &= \left| (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} \right| + \left| (-\cos x + \sin x) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \right| \\ &= (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Ta có

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{3 + \cos 4x}{4} \right) dx = \frac{\pi}{4} \left(3x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$V = \frac{3\pi^2}{4} \text{ (dvtt).}$$

Câu 4. A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(-2; 1; -1)

1. Ta có $\vec{AB} = (-1; 1; 0)$, $\vec{AC} = (-1; 0; 1)$, $\vec{AD} = (-3; 1; -1)$

Suy ra: $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (1; 1; 1)$, $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = -3 \neq 0$.

Như thế $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ không đồng phẳng. Vậy A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

2. Thể tích khối tứ diện ABCD:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{2}.$$

3. Độ dài đường cao của tứ diện ABCD hạ từ A là $h = \frac{3V}{S_{ABCD}}$ (*)

Ta có $\vec{BC} = (0; -1; 1)$, $\vec{BD} = (-2; 0; -1) \Rightarrow [\vec{BC}, \vec{BD}] = (1; -2; -2)$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{3}{2}$

Thế vào (*) ta được $h = 1$

Câu 5.

1. Xét phương trình $x^{2x} = 2^x$.

Điều kiện $x \neq 0$.

- i) $x > 0$: Lấy lôgarit thập phân hai vế

$$2x \lg x = x \lg 2 \Leftrightarrow 2 \lg x = \lg 2 \Leftrightarrow \lg x = \frac{1}{2} \lg 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ (vì } x > 0)$$

- ii) $x < 0$: Ta phải thêm điều kiện x là số nguyên.

Đặt $u = -x$ ta được phương trình:

$$(-u)^{2u} = 2^{-u} \Leftrightarrow u^{-2u} = 2^{-u}$$

Lấy lôgarit thập phân hai vế

$$-2u \lg u = -u \lg 2 \Leftrightarrow \lg u = \frac{1}{2} \lg 2$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{2} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{2}$.

2. Gọi V là thể tích khối chóp S.ABC và V' là thể tích khối chóp S.A'B'C'.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên:

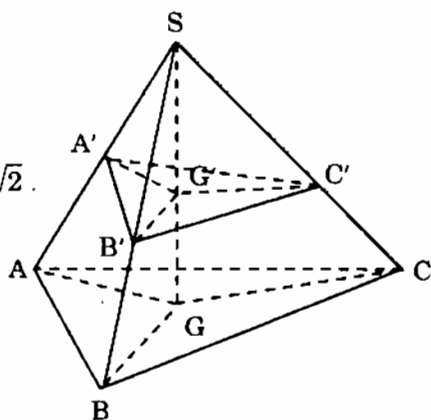
$$S_{GAB} = S_{GBC} = S_{GCA}$$

$$\text{Suy ra } V_{SGAB} = V_{SGBC} = V_{SGCA} = \frac{V}{3}$$

Ta có:

$$V' = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SG'}{SG} \cdot V_{SGAB} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SG'}{SG} \cdot V_{SGBC} + \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SG'}{SG} \cdot V_{SGCA}$$

$$V' = \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SA'}{SA} \right) \frac{SG'}{SG} \cdot \frac{V}{3}$$



$$\text{Mà } V' = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V$$

Do đó ta có hệ thức:

$$\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot V = \left(\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} + \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} + \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SA'}{SA} \right) \frac{SG'}{SG} \cdot \frac{V}{3}$$

Rút gọn ta được

$$\frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} = 3 \frac{SG}{SG'} \quad (\text{đpcm}).$$

ĐỀ 17

Câu 1. Cho hàm số $y = (x - m)(x - n)(x - p)$.

- Giả sử $m < n < p$, chứng minh rằng hàm số luôn đạt cực đại và cực tiểu.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = n = 1$, $p = 4$.
- Tìm tất cả các điểm trên đồ thị (C) mà qua đó vẽ được một và chỉ một tiếp tuyến với (C).

Câu 2.

- Giải phương trình $\tan x + \cot 2x = 2 \cot 4x$
- Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiệm?

$$x + m = 2\sqrt{x+2}$$

Câu 3.

- a) Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a; b]$ thì ta có

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

- b) Chứng minh rằng $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 8 \sin^2 x} dx \leq \frac{3\pi}{2}$.

- Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai parabol (P): $y^2 = 4x$ và (Q): $x^2 = 4y$.

Câu 4. Giải bài toán sau bằng phương pháp tọa độ.

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N là các điểm lần lượt chia các đoạn thẳng A'C và C'D theo tỉ số k và m ($k \neq m$). Hãy xác định các số k và m để đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'.

Câu 5.

- Giải phương trình $5^x + 12^x = 13^x$.
- Cho khối tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Điểm I bất kì nằm bên trong khối tứ diện. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn qua I, cắt các tia OA, OB, OC lần lượt tại các điểm M, N, P. Xác định vị trí của M, N, P để thể tích của khối tứ diện OMNP đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Câu 1.

1. Phương trình của hàm số có thể viết

$$y = x^3 - (m + n + p)x^2 + (mn + np + pm)x - mnp$$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$\text{Đạo hàm } y' = 3x^2 - 2(m + n + p)x + mn + np + pm$$

$$\Delta' = (m + n + p)^2 - 3(mn + np + pm) = \frac{1}{2}[(m - n)^2 + (n - p)^2 + (p - m)^2]$$

Vì $m < n < p$ nên $\Delta' > 0$, do đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Suy ra hàm số luôn đạt cực đại và cực tiểu.

2. Khi $m = n = 1, p = 4$ thì phương trình của hàm số trở thành

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

(độc giả tự giải)

3. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9$

Trên (C) lấy điểm $A(a; a^3 - 6a^2 + 9a - 4)$ bất kì. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A có dạng:

$$y = (3a^2 - 12a + 9)(x - a) + a^3 - 6a^2 + 9a - 4$$

$$\Leftrightarrow y = (3a^2 - 12a + 9)x - 2a^3 + 6a^2 - 4.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến tại A:

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (3a^2 - 12a + 9)x - 2a^3 + 6a^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow (x + 2a - 6)(x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a + 6 \end{cases}$$

* $-2a + 6 = a \Leftrightarrow a = 2$, khi đó A ở vị trí $A_0(2; -2)$, rõ ràng tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A_0 không cắt đồ thị tại điểm thứ hai.

* $-2a + 6 \neq a \Leftrightarrow a \neq 2$ thì tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ a sẽ cắt (C) tại điểm thứ hai A_1 có hoành độ $a_1 = -2a + 6$. Như vậy có nghĩa là qua điểm A trên (C) có hoành độ $a \neq 2$, ta vẽ được với (C) hai tiếp tuyến, một tiếp tuyến nhận A làm tiếp điểm và một tiếp tuyến nhận điểm A_1 có hoành độ $a_1 = -2a + 6$ làm tiếp điểm.

Tóm lại trên đồ thị (C) có duy nhất một điểm thỏa mãn điều kiện đề bài là $A_0(2; -2)$.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$ (*)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + p\pi \\ 2x \neq q\pi \\ 4x \neq r\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + p\pi \\ x \neq q\frac{\pi}{2} \\ x \neq r\frac{\pi}{4} \end{cases}, (p; q, r \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan 2x} = \frac{2}{\tan 4x} \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan 2x} = \frac{1 - \tan^2 2x}{\tan 2x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x \tan 2x = -\tan^2 2x \Leftrightarrow \tan 2x(\tan 2x + \tan x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2x = 0 \\ \tan 2x = -\tan x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ 2x = -x + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \text{ (loại)} \\ x = m\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = m\frac{\pi}{3} \text{ (so với điều kiện thì } m \text{ phải không chia hết cho 3)}$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x = m\frac{\pi}{3}$ với $m \in \mathbb{Z}$ và m không chia hết cho 3.

2. Xét phương trình $x + m = 2\sqrt{x+2}$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x+2}$ ($x \geq -2$). Thế thì $t \geq 0$ và $x = t^2 - 2$

Phương trình đã cho trở thành phương trình

$$t^2 - 2t + m - 2 = 0 \quad (2)$$

Như vậy, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có ít nhất một nghiệm $t \geq 0$. Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là:

$$\Delta' = 1 - (m - 2) = 3 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 3$$

Với điều kiện đó, phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 . Theo định lí Viét ta có $t_1 + t_2 = 2 > 0$

Thành thử trong hai số t_1, t_2 phải có ít nhất một số dương.

Vậy đáp án của bài toán là $m \leq 3$.

Câu 3.

1. a) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$.

$$f(x) - g(x) \geq 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0 &\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \text{ (dpcm)}. \end{aligned}$$

b) Trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$ ta có:

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1 + 8\sin^2 x} \leq 3$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 8\sin^2 x} dx \leq 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\text{Vậy } \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 + 2\sin^2 x} dx \leq \frac{3\pi}{2}$$

2. Theo giả thiết (P): $y^2 = 4x$ và (Q): $x^2 = 4y$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Q):

$$\frac{x^4}{16} = 4x \Leftrightarrow x(x^3 - 64) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

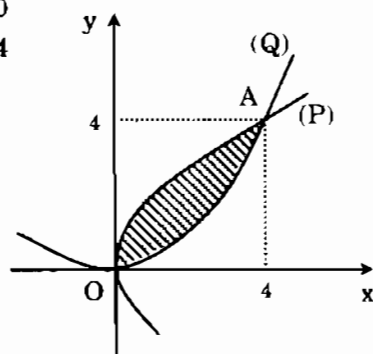
Suy ra (P) và (Q) cắt nhau tại hai điểm là gốc tọa độ O và điểm A(4; 4).

Ta có: $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$

$$x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2.$$

Diện tích của hình phẳng:

$$S = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{16}{3} \text{ (đvdt)}.$$



Câu 4. Gọi $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Đặt hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $B(a; 0; 0)$, $D(0; b; 0)$, $A'(0; 0; c)$.

Suy ra $C(a; b; 0)$, $C'(a; b; c)$, $D'(0; b; c)$

Từ giả thiết ta có:

$$+ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-k} (\overrightarrow{AA'} - k\overrightarrow{AC})$$

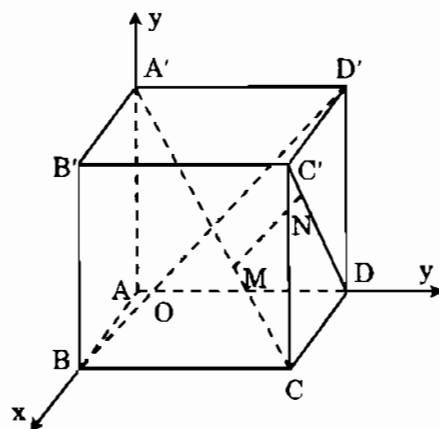
với $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; c)$, $\overrightarrow{AC} = (a; b; 0)$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{ka}{1-k}; -\frac{kb}{1-k}; \frac{c}{1-k} \right)$$

$$+ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-m} (\overrightarrow{AC'} - m\overrightarrow{AD}) \text{ với}$$

$$\overrightarrow{AC'} = (a; b; c), \overrightarrow{AD} = (0; b; 0)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{1-m}; b; \frac{c}{1-m} \right)$$



$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{1-m} + \frac{ka}{1-k}; b + \frac{kb}{1-k}; \frac{c}{1-m} - \frac{c}{1-k} \right)$$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{BD'} = (-a; b; c)$ và vì BD' và $C'D$ là hai đường thẳng chéo nhau và $N \in C'D$ nên đường thẳng MN không thể trùng với đường thẳng BD' . Do đó MN song song với BD' khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD'}$ cùng phương:

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{BD'}] = \left(bc \left(\frac{2}{1-k} - \frac{1}{1-m} \right); ac \left(1 - \frac{2}{1-m} \right); ab \left(\frac{2-m}{1-m} + \frac{2k}{1-k} \right) \right)$$

Do đó $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD'}$ cùng phương khi và chỉ khi:

$$[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD'}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1-k} - \frac{1}{1-m} = 0 \\ 1 - \frac{2}{1-m} = 0 \\ \frac{2-m}{1-m} + \frac{2k}{1-k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ k = -3 \end{cases}$$

Vậy khi $k = -3$, $m = -1$ thì đường thẳng MN và đường thẳng BD' song song với nhau.

Câu 5.

1. Xét phương trình $5^x + 12^x = 13^x$

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

$$\text{Ta có: } 5^x + 12^x = 13^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 (*)$$

Hiển nhiên $x = 2$ cũng là một nghiệm của phương trình (*). Ta xét hai

$$\text{hàm số: } y = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x \quad (C) \text{ và } y = 1 \quad (D).$$

Dễ thấy $A(2; 1)$ là một giao điểm của (C) và (D).

$$\text{Hàm số } y = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x \text{ là một hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R}, \text{ do đó thị (C)}$$

của hàm số này và đường thẳng (D): $y = 1$ có nhiều nhất một giao điểm. Do vậy $A(2; 1)$ là giao điểm duy nhất của (C) và (D). Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

2. Chọn hệ Oxyz sao cho:

– Trục hoành qua O và A, chiều dương theo vectơ $\overrightarrow{OA}$

– Trục tung qua O và B, chiều dương theo vectơ $\overrightarrow{OB}$

– Trục cao qua O và C, chiều dương theo vectơ $\overrightarrow{OC}$

Gọi M_0, N_0, P_0 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên Ox, Oy, Oz.

Đặt $OM = a, OB = b, OP = c, OM_0 = x_0, ON_0 = y_0, OP_0 = z_0$. Suy ra:

$$M(a; 0; 0), N(0; b; 0), C(0; 0; c), I(x_0; y_0; z_0).$$

Phương trình của mặt phẳng (α) tức mặt phẳng (MNP):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Do (α) đi qua I nên ta có hệ thức $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1$

Thể tích của khối tứ diện OMNP: $V = \frac{1}{6} abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x_0 y_0 z_0}{abc}}$$

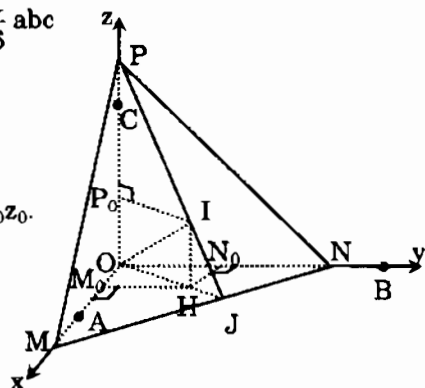
$$\Rightarrow 1 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x_0 y_0 z_0}{abc}}. \text{ Suy ra } abc \geq 27 x_0 y_0 z_0.$$

$$\text{Do đó } V \geq \frac{9}{2} x_0 y_0 z_0.$$

Vậy $\min V = \frac{9}{2} x_0 y_0 z_0$, xảy ra khi:

$$\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{1}{3} \text{ hay } a = 3x_0, b = 3y_0, c = 3z_0.$$

Trong trường hợp này I là trọng tâm của tam giác MNP.



ĐỀ 18

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3(m + 3)x^2 + 18mx - 8$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

- Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành?
- Chứng minh rằng trên parabol $(P): y = x^2$ có hai điểm không thuộc đồ thị của hàm số đã cho dù m lấy giá trị bất kì nào.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

Câu 2.

- Chứng minh rằng, phương trình sau đây vô nghiệm:

$$\tan x + \cot x = \sin x + \cos x$$

- Xác định số m lớn nhất để với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta đều có:

$$x(x + 2)(x + 4)(x + 6) \geq m$$

Câu 3.

- So sánh hai tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^4}{x^4 + 1} dx$ và $J = \int_0^1 \frac{x^5}{x^5 + 1} dx$.

- Gọi (H) là hình elip giới hạn bởi elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$). Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay xung quanh trục Ox .

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $\overline{AB} = (x, y)$ và $\overline{AC} = (x', y')$. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC cho bởi công thức $S = \frac{1}{2} |xy' - x'y|$.

Áp dụng: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; 4)$, $B(-1; 1)$, $C(6; 0)$. Tính diện tích của tam giác ABC .

Câu 5.

- Giải phương trình $10.25^x + 10.4^x = 29.10^x$
- Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau. Trong góc tam diện $Oxyz$ lấy điểm M cố định. Một mặt phẳng (α) đi động qua M cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C . Gọi khoảng cách từ M tới $(OBC), (OAC), (OAB)$ lần lượt là a, b, c .
 - Chứng minh rằng tam giác ABC có các góc trong đều nhọn.
 - Tính OA, OB, OC theo a, b, c để thể tích khối tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất.
 - Tính OA, OB, OC theo a, b, c để tổng $OA + OB + OC$ nhỏ nhất.

Giải

Câu 1.

- Đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = m \end{cases}$$

Thế vào (1) ta được:

$$\bullet \text{ Với } x = 3: m = \frac{35}{27}$$

$$\bullet \text{ Với } x = m: m^3 - 9m^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2 - 8m - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy với $m = \frac{35}{27}$, $m = 1$, $m = 4 \pm 2\sqrt{6}$ thì đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (P)

$$2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = x^2 \Leftrightarrow 3m(6x - x^2) = -2x^3 + 10x^2 + 8 \quad (*)$$

$$\text{Khi } 6x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases} \text{ thì phương trình } (*) \text{ vô nghiệm}$$

Vậy trên (P) có hai điểm là $O(0; 0)$ và $A(6; 36)$ không thuộc (C_m) với mọi m .

3. Khi $m = 1$ thì phương trình của hàm số trở thành $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 8$ (độc giả tự giải)

Câu 2.

1. Xét phương trình: $\tan x + \cot x = \sin x + \cos x$

$$\text{Điều kiện } x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $\tan x$ và $\cot x$ cùng dấu nên:

$$|\tan x + \cot x| = |\tan x| + |\cot x| \geq 2\sqrt{|\tan x| |\cot x|} = 2 \quad (1)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình $\tan x + \cot x = \sin x + \cos x$ vô nghiệm.

2. Ta xét bất phương trình

$$x(x+2)(x+4)(x+6) \geq m \quad (1)$$

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$(x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) \geq m \quad (2)$$

Đặt $t = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \geq 0$, thì (2) trở thành:

$$(t-9)(t-1) \geq m \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 \geq m \quad (3)$$

Do vậy, ta sẽ tìm m để (3) được nghiệm đúng với mọi $t \geq 0$

Xét hàm số:

$$y = f(t) = t^2 - 10t + 9 \quad (t \geq 0)$$

$$y' = 2t - 10, y' = 0 \Leftrightarrow t = 5$$

t	0	5	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	9		-16	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy bất phương trình (3) nghiệm đúng với mọi $t \geq 0$ khi và chỉ khi $m \leq -16$.

Vậy số lớn nhất của m là $m = -16$.

Câu 3.

$$1. I = \int_0^1 \frac{x^4}{x^4 + 1} dx \text{ và } J = \int_0^1 \frac{x^5}{x^5 + 1} dx$$

Với $x \in [0; 1]$, ta có:

$$\frac{x^4}{x^4 + 1} - \frac{x^5}{x^5 + 1} = \frac{x^4(x^5 + 1) - x^5(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)(x^5 + 1)} = \frac{x^4 - x^5}{(x^4 + 1)(x^5 + 1)} \geq 0$$

Do đó: $\frac{x^4}{x^4 + 1} \geq \frac{x^5}{x^5 + 1}$, đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$

Theo kết quả Đề 17 – câu 3, ta suy ra

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4 + 1} dx > \int_0^1 \frac{x^5}{x^5 + 1} dx$$

Vậy $I > J$.

2. Elip (E) cắt trục hoành tại hai điểm $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

Do trục Oy là trục đối xứng của (E), nên thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra là:

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

Câu 4.

Ta có thể coi mặt phẳng (Oxy) là mặt phẳng tọa độ của không gian tọa độ Oxyz. Trong hệ Oxyz, các vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ định bởi $\vec{AB} = (x; y; 0)$ và $\vec{AC} = (x'; y'; 0)$

$$\text{Ta có } [\vec{AB}, \vec{AC}] = (0; 0; xy' - x'y)$$

$$\text{Vậy diện tích của tam giác ABC là } S = \frac{1}{2} \|\vec{AB}, \vec{AC}\| = \frac{1}{2} |xy' - x'y|$$

Áp dụng: Ta có $\vec{AB} = (-2; -3)$, $\vec{AC} = (5; -4)$. Áp dụng kết quả trên ta được diện tích của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} |(-2) \cdot (-4) - 5 \cdot (-3)| = \frac{23}{2}.$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $10.25^x + 10.4^x = 29.10^x$ (*)

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow 10.5^{2x} + 10.2^{2x} = 29.2^x.5^x \Leftrightarrow 10.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 29.\left(\frac{5}{2}\right)^x + 10 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ ($t > 0$), ta được phương trình:

$$10t^2 - 29t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \text{ hoặc } t = \frac{2}{5}$$

$$\bullet t = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet t = \frac{2}{5} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = -1$.

2. a) Gọi I là hình chiếu vuông góc của O trên AB .

Tam giác OAB vuông tại O nên I nằm trên đoạn thẳng AB , khác với A và B . Ta có:

$$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp OC \text{ (vì } OC \perp (OAB)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB \perp (OCI)$$

Từ hai tam giác IAC và IBC cùng vuông tại I , ta dễ suy ra hai góc A và B của tam giác ABC đều nhọn. Tương tự góc C cũng nhọn.

b) Ta có

$$V_{OABC} = V_{MOBC} + V_{MOCA} + V_{MOAB}$$

$$\text{Hay } \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} OB \cdot OC \cdot a + \frac{1}{6} OC \cdot OA \cdot b + \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot c$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} = 1$$

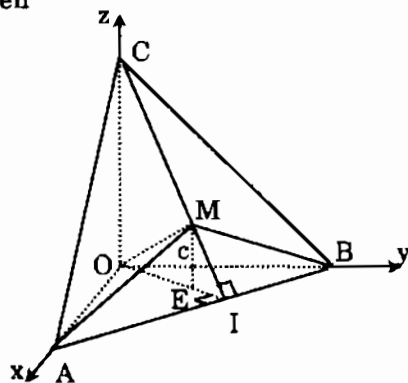
$$\text{Mặt khác } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{abc}{6} \cdot \frac{OA}{a} \cdot \frac{OB}{b} \cdot \frac{OC}{c}$$

Vì a, b, c không đổi nên V_{OABC} nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{OA}{a} \cdot \frac{OB}{b} \cdot \frac{OC}{c}$ nhỏ

nhất, tức là $\frac{a}{OA} \cdot \frac{b}{OB} \cdot \frac{c}{OC}$ lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{a}{OA} \cdot \frac{b}{OB} \cdot \frac{c}{OC} \leq \left(\frac{\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC}}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$



Vậy $\max\left(\frac{a}{OA} \cdot \frac{b}{OB} \cdot \frac{c}{OC}\right) = \frac{1}{27}$ khi và chỉ khi:

$$\frac{a}{OA} = \frac{b}{OB} = \frac{c}{OC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow OA = 3a, OB = 3b, OC = 3c$$

Khi đó $\min V_{OABC} = \frac{9abc}{2}$.

c) Ta viết:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{OA}} \cdot \sqrt{OA} + \sqrt{\frac{b}{OB}} \cdot \sqrt{OB} + \sqrt{\frac{c}{OC}} \cdot \sqrt{OC} \right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq \left(\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} + \frac{c}{OC} \right) (OA + OB + OC)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq (OA + OB + OC) (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{OA}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{OB}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{OC}}$

Tức là: $\frac{\sqrt{a}}{OA} = \frac{\sqrt{b}}{OB} = \frac{\sqrt{c}}{OC} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{OA + OB + OC} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$

(Kết quả này được suy từ (*) khi nó trở thành đẳng thức)

Từ đó: $OA = \sqrt{a} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

$$OB = \sqrt{b} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$OC = \sqrt{c} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Khi đó: $\min(OA + OB + OC) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$.

ĐỀ 19

Câu 1. Cho hàm số $y = 2(4 - x)(x - 1)^2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Một đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 0)$ và có hệ số góc bằng m . Với giá trị nào của m thì Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN, tìm quỹ tích của điểm I.

Câu 2.

1. Giải phương trình: $\cos x + 2\cos 2x + 4\cos 4x = 7$.
2. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x} + x^2 \geq 4 - 2x$.

Câu 3.

1. Tính tích phân $I = \int_0^2 \max(x^2; -x + 2) dx$.
2. Gọi (H) là hình tròn giới hạn bởi đường tròn (T) có phương trình $x^2 + (y - 3)^2 = 4$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay xung quanh trục Ox.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3).

1. Hãy viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua ba điểm A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3) biết tâm của nó nằm trên mặt phẳng (Oxy).
2. Viết phương trình tiếp diện của (S) tại điểm A.

Câu 5.

1. Giải phương trình $27^x + 3 \cdot 12^x = 4 \cdot 8^x$ (1)
2. Cho tứ diện ABCD với $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $AD = BC = c$.
a) Chứng minh rằng: Chiều cao h kẻ từ mỗi đỉnh đến mặt đối diện được định bởi:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} \right)$$

- b) Bên trong tứ diện ABCD lấy điểm M bất kì. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến bốn mặt của tứ diện bằng một hằng số.

Giải**Câu 1.**

1. Khảo sát hàm số $y = 2(4 - x)(x - 1)^2$ (độc giả tự giải)
2. * Phương trình của hàm số có thể viết $y = -2x^3 + 12x^2 - 18x + 8$
Đường thẳng Δ đi qua điểm A(1; 0) và có hệ số góc bằng m nên có phương trình $y = m(x - 1)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ :

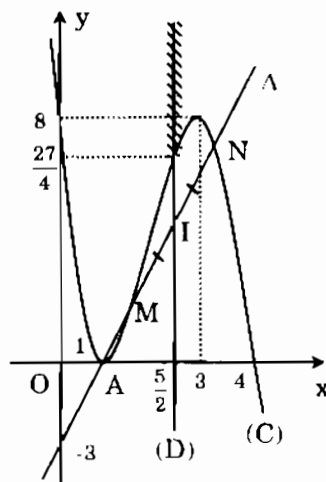
$$\begin{aligned} -2x^3 + 12x^2 - 18x + 8 &= m(x - 1) \\ \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - 10x + m + 8) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = 2x^2 - 10x + m + 8 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Delta' = -2m + 9$$

Điều kiện để Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt là phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1, nghĩa là:

$$\begin{cases} -2m + 9 > 0 \\ g(1) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$



Vậy nếu $m < \frac{9}{2}$ và $m \neq 0$ thì đường thẳng Δ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N.

* Hoành độ của M và N là các nghiệm của phương trình

$$2x^2 - 10x + m + 8 = 0 \quad (m < \frac{9}{2} \text{ và } m \neq 0)$$

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng MN nên ta có:

$$x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{5}{2}. \text{ Suy ra } y_I = m(x_I - 1) = \frac{3m}{2}$$

Như vậy điểm I luôn nằm trên đường thẳng (D) có phương trình $x = \frac{5}{2}$

$$\text{Giới hạn } y_I = \frac{3m}{2} \Leftrightarrow m = \frac{2y_I}{3}$$

$$\bullet m < \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{2y_I}{3} < \frac{9}{2} \Leftrightarrow y_I < \frac{27}{4}$$

$$\bullet m \neq 0 \Rightarrow y_I \neq 0$$

Vậy quỹ tích của điểm I là một phần của đường thẳng (D) định bởi phương

$$\text{trình: } x = \frac{5}{2} \text{ với } y < \frac{27}{4} \text{ và } y \neq 0.$$

Câu 2.

$$1. \text{ Xét phương trình } \cos x + 2\cos 2x + 4\cos 4x = 7 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - \cos x) + 2(1 - \cos 2x) + 4(1 - \cos 4x) = 0 \quad (2)$$

Nhận xét: $1 - \cos x \geq 0, 2(1 - \cos 2x) \geq 0, 4(1 - \cos 4x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó phương trình (2) tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 - \cos x = 0 \\ 2(1 - \cos 2x) = 0 \\ 4(1 - \cos 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 & (a) \\ \cos 2x = 1 & (b) \\ \cos 4x = 1 & (c) \end{cases}$$

Ta có $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

Nhận thấy rằng họ nghiệm $x = k2\pi$ nghiệm đúng hai phương trình (b) và (c).

Vậy phương trình đã cho có một họ nghiệm là $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$2. \text{ Xét bất phương trình}$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x^2 \geq 4 - 2x \quad (1)$$

Tập xác định của phương trình $D = \mathbb{R}$

Bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình

$$(x^2 + 2x + 2) + \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 6 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{(x+1)^2 + 1} \geq 1$$

Ta được bất phương trình $t^2 + t - 6 \geq 0$

Suy ra $t \leq -3$ hoặc $t \geq 2$

Kết hợp với điều kiện $t \geq 1$, ta được $t \geq 2$

$$\text{Ta có } t \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 - \sqrt{3} \\ x \geq -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $x \leq -1 - \sqrt{3}$ hoặc $x \geq -1 + \sqrt{3}$.

Câu 3.

$$1. \text{ Xét tích phân } I = \int_0^2 \max(x^2; -x + 2) dx$$

$$\text{Trên đoạn } [0; 2] \text{ ta có } \max(x^2; -x + 2) = \begin{cases} -x + 2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^2 \max(x^2; -x + 2) dx = \int_0^1 (-x + 2) dx + \int_1^2 x^2 dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{23}{6}.$$

2. Dễ thấy (H) là hình tròn có tâm $I(0; 3)$ và bán kính $R = 2$

$$\text{Ta có: } x^2 + (y - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{4 - x^2} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$\text{Phương trình của cung } \widehat{ACB}: y = 3 + \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{Phương trình của cung } \widehat{ADB}: y = 3 - \sqrt{4 - x^2}$$

Do Oy là trục đối xứng của (T), nên thể tích của vật thể tròn xoay là:

$$V = 2\pi \int_0^2 \left[(3 + \sqrt{4 - x^2})^2 - (3 - \sqrt{4 - x^2})^2 \right] dx$$

$$V = 24\pi \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

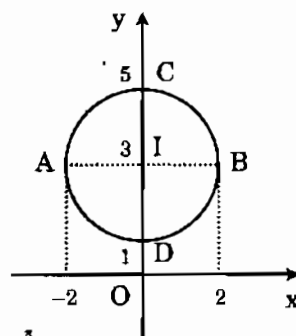
$$\text{Đặt } x = 2\sin t \quad \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right). \text{ Suy ra } dx = 2\cos t dt$$

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } t = 0, \text{ khi } x = 2 \text{ thì } t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\text{Vậy } V = 24\pi^2 \text{ (đvtt)}.$$



Câu 4. A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3)

1. Gọi $I(-a; -b; -c)$ là tâm của mặt cầu (S) thỏa mãn đề bài.

Theo giả thiết $I \in mp(Oxy)$ nên $c = 0$, do đó $I(-a; -b; 0)$

Suy ra phương trình của (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + d = 0$

Vì (S) đi qua ba điểm A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 21 + 2a + 4b + d = 0 \\ 11 + 2a - 6b + d = 0 \\ 17 + 4a + 4b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ d = -21 \end{cases}$$

Vậy phương trình của mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$.

2. Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 0)$. Gọi (P) là tiếp diện của (S) tại A, thì (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{IA} = (3; 1; -4)$. Phương trình của tiếp diện (P): $3(x - 1) + 1(y - 2) - 4(z + 4) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 4z - 21 = 0$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $27^x + 3 \cdot 12^x = 4 \cdot 8^x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 3^{3x} + 3 \cdot 2^{2x} \cdot 3^x = 4 \cdot 2^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + 3\left(\frac{3}{2}\right)^x - 4 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ ($t > 0$), ta được phương trình:

$$t^3 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

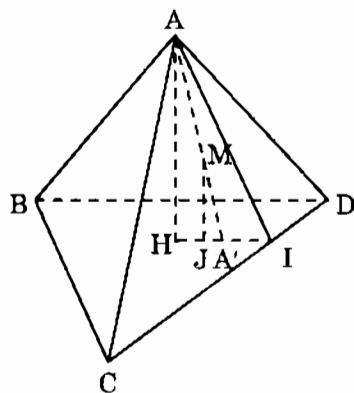
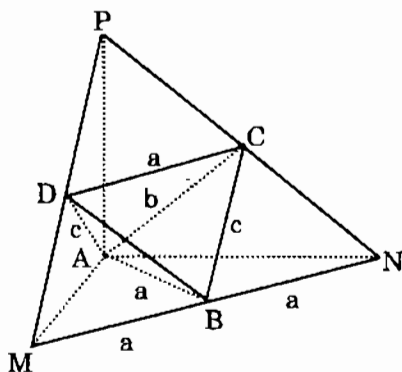
$$\text{Như vậy } t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

2. Giả thiết cho tứ diện ABCD với $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $AD = BC = c$

- a) Qua B ta dựng đường thẳng song song với CD; Qua C dựng đường thẳng song song với BD; Qua D dựng đường thẳng song song với BC. Các đường thẳng trên cắt nhau tại M, N, P (như hình vẽ)

Ta có $AB = BM = BN = a$ suy ra $AM \perp AN$; tương tự $AN \perp AP$ và $AP \perp AM$.
Như vậy AM, AN, AP vuông góc với nhau từng đôi một.



$$\text{Nếu đặt } AM = x, AN = y, AP = z \text{ thì ta có: } \begin{cases} x^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2) \\ y^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ z^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2) \end{cases}$$

Nhận thấy rằng khoảng cách h từ A đến $mp(BCD)$ bằng với khoảng cách từ A đến $mp(MNP)$.

Ta dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} \right) (*)$$

Kết quả này không thay đổi khi ta hoán vị a, b, c nên khoảng cách từ các đỉnh của tứ diện $ABCD$ đến mặt đối của nó bằng nhau.

Vậy chiều cao h của tứ diện $ABCD$ định bởi hệ thức (*).

- b) Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 là khoảng cách từ M đến các mặt $(BCD), (ACD), (ADB), (ABC)$ và V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích các khối tứ diện $MBCD, MACD, MABD, MABC$.

Từ giả thiết suy ra tứ diện $ABCD$ có các mặt bằng nhau, gọi S là diện tích của chúng.

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$\text{Hay } \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} Sh_1 + \frac{1}{3} Sh_2 + \frac{1}{3} Sh_3 + \frac{1}{3} Sh_4 \Leftrightarrow h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$$

Vậy: Tổng khoảng cách từ M đến bốn mặt của khối tứ diện bằng h là một hằng số.

ĐỀ 20

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.
2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 3x + 2 = 2 \left(\frac{m^2 + 1}{m} \right) \quad (m \neq 0)$$

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$.
2. Cho hàm số $y = x^2 - 2|x - 1| + 2m - 3$. Xác định m để giá trị nhỏ nhất của hàm số lớn hơn 1.

Câu 3.

1. Chứng minh rằng: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} (1 + 2\sqrt{\tan x}) (8 - 3\sqrt{\tan x}) dx \leq \frac{27\pi}{4}$
2. Chứng minh rằng hàm số $F(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A, B, C, D với A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1), D(4; 1; 0).

1. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.
2. Viết phương trình của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu đó.

Câu 5.

1. Giải phương trình $2^{\frac{3x}{2}} + 1 = 3^x$.
2. Cho tứ diện ABCD với $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $AD = BC = c$.
 - a) Tính thể tích V của khối tứ diện ABCD theo a, b, c.
 - b) Tính khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của tứ diện ABCD.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (độc giả tự giải)

2. Đặt $k = 2\left(\frac{m^2 + 1}{m}\right)$, phương trình đã

cho trở thành $x^3 - 3x + 2 = k$ (*)

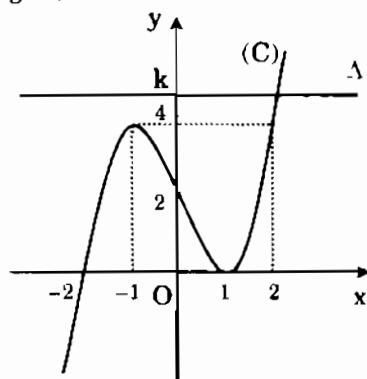
Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $\Delta: y = k$

Với $m \neq 0$, ta có:

$$\left| \frac{m^2 + 1}{m} \right| = \left| m + \frac{1}{m} \right| \geq 2 \Rightarrow |k| \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = \pm 1$

- Khi $m > 0$ và $m \neq 1$ thì $k > 4$: phương trình có một nghiệm lớn hơn 2.
- Khi $m = 1$ thì $k = 4$: phương trình có 2 nghiệm (nghiệm kép $x_{1,2} = -1$ và nghiệm $x_3 = 2$).
- Khi $m < 0$ thì $k < -4$: phương trình có một nghiệm.



Câu 2.

1. Xét phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x - \sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 & (2) \\ \sin x - \cos x - \sin x \cos x + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$* (2) \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ (để thấy } \cos x \neq 0)$$

$$* \text{ Để giải (3) ta đặt } t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (điều kiện } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

Ta có $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$

Phương trình (3) trở thành:

$$t - \frac{1-t^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Từ đó $t = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + m2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + m2\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = m2\pi, x = \frac{3\pi}{2} + m2\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

2. $y = x^2 - 2|x - 1| + 2m - 3$

Theo yêu cầu của bài toán, ta cần xác định để

$$y > 1 \Leftrightarrow y - 1 > 0, \text{ với mọi } x$$

$$\text{Mà } y - 1 = x^2 - 2|x - 1| + 2m - 4$$

$$\text{Do đó } y - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2|x - 1| + 2m - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2|x - 1| > -2m + 4 \quad (*)$$

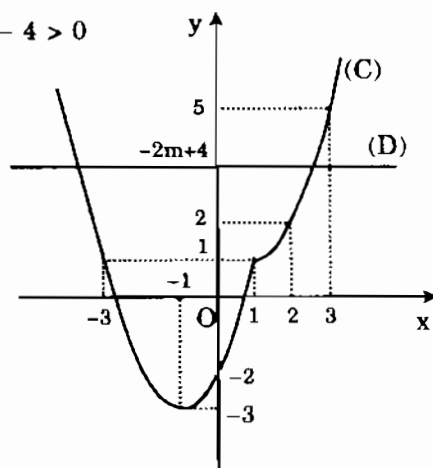
Gọi (C) là đồ thị của hàm số

$y = x^2 - 2|x - 1|$ và (D) là đường thẳng $y = -2m + 4$.

Dựa vào đồ thị ta thấy, bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

$$-2m + 4 < -3 \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$$

Vậy đáp số của bài toán là $m > \frac{7}{2}$.



Câu 3.

1. Xét tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} (1 + 2\sqrt{\tan x}) (8 - 3\sqrt{\tan x}) dx$

Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ các số $\sqrt{\tan x}$, $(1 + 2\sqrt{\tan x})$, $(8 - 3\sqrt{\tan x})$ đều không âm nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{\tan x} \cdot (1 + 2\sqrt{\tan x}) \cdot (8 - 3\sqrt{\tan x}) \leq \left(\frac{\sqrt{\tan x} + 1 + 2\sqrt{\tan x} + 8 - 3\sqrt{\tan x}}{3} \right)^3 \leq 27$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} (1 + 2\sqrt{\tan x}) (8 - 3\sqrt{\tan x}) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} 27 dx = \frac{27\pi}{4}.$$

$$2. F(x) = |x| - \ln(1 + |x|), f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Tập xác định của hai hàm số $D = \mathbb{R}$

Ta sẽ chứng minh $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Khi $x \in (0; +\infty)$: Phương trình của $F(x)$ và $f(x)$ trở thành

$$F(x) = x - \ln(1 + x) \text{ và } f(x) = \frac{x}{1 + x}$$

$$\text{Ta có } F'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x} = f(x).$$

• Khi $x \in (-\infty; 0)$: Phương trình của $F(x)$ và $f(x)$ trở thành

$$F(x) = -x - \ln(1 - x) \text{ và } f(x) = \frac{x}{1 - x}$$

$$\text{Ta có } F'(x) = -1 + \frac{1}{1 - x} = \frac{x}{1 - x} = f(x).$$

• Xét tại điểm $x = 0$

$$\text{Khi } x > 0: \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x - \ln(1 + x)}{x} = 1 - \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\ln(1 + x)}{x} \right) = 0$$

$$\text{Khi } x < 0: \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{-x - \ln(1 - x)}{x} = -1 + \frac{\ln(1 - x)}{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-1 + \frac{\ln(1 - x)}{-x} \right) = 0$$

Do đó $F'(0) = 0 = f(0)$

Từ các kết quả trên ta suy ra $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Vậy $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 4. A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1), D(4; 1; 0)

1. Ta có $\overline{AB} = (-6; 3; 3)$, $\overline{AC} = (-4; 2; -4)$, $\overline{AD} = (-2; 3; -3)$

Suy ra $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (-18; -36; 0)$, do đó $[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD} = -72 \neq 0$

Như thế $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ không đồng phẳng. Vậy A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

2. Phương trình của (S) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

Vì (S) đi qua bốn điểm A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1), D(4; 1; 0) nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 49 + 12a - 4b + 6c + d = 0 \\ 37 + 2b + 12c + d = 0 \\ 5 + 4a - 2c + d = 0 \\ 17 + 8a + 2b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 3)$ và có bán kính là $R = \sqrt{17}$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $2^{\frac{3x}{2}} + 1 = 3^x$

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Ta có:

$$2^{\frac{3x}{2}} + 1 = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \quad (*)$$

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm

số: $y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (C) và $y = 1$ (D).

Dễ thấy $A(2; 1)$ là một giao điểm của (C) và (D).

Do $0 < \frac{1}{3} < 1$ và $0 < \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$, nên $y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ là hàm số nghịch

biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra đồ thị (C) và đường thẳng (D): $y = 1$ có nhiều nhất một giao điểm.

Do vậy $A(2; 1)$ là giao điểm duy nhất của (C) và (D).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

2. Giả thiết cho tứ diện ABCD với $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $AD = BC = c$

- a) Thể tích V của khối tứ diện ABCD

Lập luận tương tự như Đề 19 – câu 5:

Nhận thấy rằng $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$. Do đó $V = \frac{1}{4}V_{AMNP}$

$$\begin{aligned} \text{Mà } V_{AMNP} &= \frac{1}{6}AM \cdot AN \cdot AP = \frac{1}{6}xyz \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)} \end{aligned}$$

$$V_{AMNP} = \frac{1}{3} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

Vậy thể tích của khối tứ diện ABCD là:

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

- b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau, nên $AJ = BJ$.

Suy ra tam giác ABJ cân tại J, do đó $IJ \perp AB$.

Chứng minh tương tự $IJ \perp CD$. Như thế IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

Từ tam giác ABJ:

$$AJ^2 = \frac{2AC^2 + 2AD^2 - CD^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

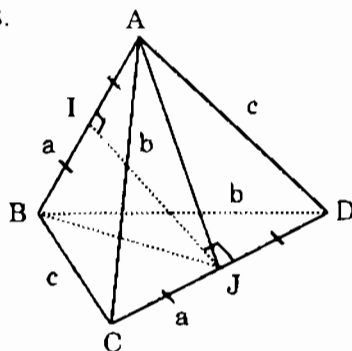
Từ tam giác AIJ vuông tại I:

$$\begin{aligned} IJ^2 &= AJ^2 - AI^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{2(b^2 + c^2 - a^2)}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } IJ = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2 - a^2)}}{2}$$

$$\text{Vậy khoảng cách giữa AB và CD là } d(AB, CD) = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2 - a^2)}}{2}$$

$$\text{Tương tự: } d(AC, BD) = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2 - b^2)}}{2}, \quad d(A, BC) = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)}}{2}.$$



ĐỀ 21

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 2$. Gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.
2. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) cắt đường thẳng $(D): y = 2$ tại ba điểm phân biệt $I(0; 2)$, M , N . Tìm m để các tiếp tuyến của (C_m) tại M và N vuông góc với nhau.

Câu 2.

1. Giải các phương trình:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

b) $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$

- 2) Cho hàm số $y = x^2 - 2x + |2x + m|$. Xác định m để giá trị nhỏ nhất của hàm số lớn hơn 3.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x \cos x dx$.

2. Tìm tất cả các mặt đối xứng của hình tứ diện đều ABCD.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho cho tam giác ABC với A(5; -1; 2), B(2; 2; 2), C(2; -1; 5).

1. Chứng minh rằng ABC là một tam giác đều.
2. Tính thể tích của phần không gian giới hạn bởi mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng tọa độ.
3. Viết phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 5.

1. Giải phương trình $4^x + 2 = 2^x + 2^{1-x}$.
2. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm K, L, M, N (khác với S). Chứng minh rằng:

a) $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$ nếu ABCD là một hình bình hành.

b) $S_{ABC} \cdot \frac{SD}{SN} + S_{ADC} \cdot \frac{SB}{SL} = S_{ABD} \cdot \frac{SC}{SM} + S_{BCD} \cdot \frac{SA}{SK}$

Giải

Câu 1.

1. Khi $m = 0$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 + 3x^2 + 2$ (độc giả tự giải)
2. * Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) và đường thẳng (D):

$$x^3 + 3x^2 + mx + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 + 3x + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Biệt thức của (2): $\Delta = 9 - 4m$

Nhận thấy rằng điểm I(0; 2) là một giao điểm của (C_m) và (D).

Điều kiện để (C_m) và (D) cắt nhau tại ba điểm phân biệt I, M, N là phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0, nghĩa là:

$$\begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ g(0) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vậy $m < \frac{9}{4}$ và $m \neq 0$.

* Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của M và N. Các tiếp tuyến của (C_m) tại M và N có hệ số góc là:

$$k_1 = f'(x_1) = 3x_1^2 + 6x_1 + m; \quad k_2 = f'(x_2) = 3x_2^2 + 6x_2 + m$$

$$k_1 \cdot k_2 = (3x_1^2 + 6x_1 + m)(3x_2^2 + 6x_2 + m)$$

$$k_1 \cdot k_2 = 9x_1^2 x_2^2 + 18x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 3m(x_1^2 + x_2^2)$$

$$+ 6m(x_1 + x_2) + 36x_1 x_2 + m^2 \quad (*)$$

Trong đó $x_1 + x_2 = -3$ và $x_1 x_2 = m$

Hai tiếp tuyến của (C_m) tại M và N vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m = -1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \\ m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Câu 2.

1. a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos 2x \cos x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = \cos 2x \end{cases}$$

$$\bullet \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\bullet \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{2} \text{ (để thấy } \cos 2x \neq 0)$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{2}$ ($k, m \in \mathbb{Z}$)

b) $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$ (2)

Điều kiện: $\sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{4}$ (chú ý: $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2(\cos 2x + \sin 2x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

So với điều kiện, ta thấy phương trình vô nghiệm.

2. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + |2x + m|$. Xác định m để giá trị nhỏ nhất của hàm số lớn hơn 3

Theo yêu cầu của bài toán, ta cần xác định m để

$$y > 3 \Leftrightarrow y - 3 > 0, \text{ với mọi } x$$

$$\text{Mà } y - 3 = x^2 - 2x + |2x + m| - 3$$

$$\text{Do đó } y - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + |2x + m| - 3 > 0 \Leftrightarrow |2x + m| > -x^2 + 2x + 3 (*)$$

$$\text{Gọi (P): } y = -x^2 + 2x + 3 \text{ và (D): } y = |2x + m|$$

$$\text{Ta có } y = |2x + m| \Leftrightarrow y = \begin{cases} 2x + m & \text{khi } x > -\frac{m}{2} \\ 0 & \text{khi } x = -\frac{m}{2} \\ -2x - m & \text{khi } x < -\frac{m}{2} \end{cases}$$

Đồ thị (D) gồm hai nửa đường thẳng:

$$y = 2x + m \text{ khi } x \geq -\frac{m}{2} \text{ và } y = -2x - m \text{ khi } x < -\frac{m}{2}$$

Đường thẳng $y = 2x + m$ tiếp xúc (P) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 = 2x + m \\ -2x + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3$$

Suy ra đường thẳng $y = 2x + 3$ tiếp xúc với (P) tại điểm A(0; 3)

Tương tự, ta xét điều kiện để đường thẳng $y = -2x - m$ tiếp xúc với (P):

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 = -2x - m \\ -2x + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^2 - 4x - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow m = -7$$

Suy ra đường thẳng $y = -2x + 7$ tiếp xúc với (P) tại điểm B(2; 3).

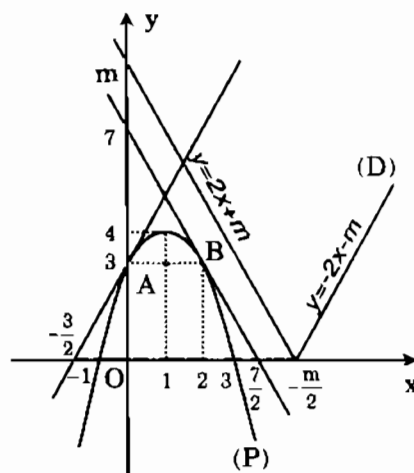
Dựa vào đồ thị, ta thấy bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi (D) nằm phía trên (P), tức là:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} > \frac{7}{2} \\ -\frac{m}{2} < -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m < -7$ hoặc $m > 3$.

Câu 3.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos^2 x} \sin x \cos x dx$$



Đặt $t = \cos^2 x$. Suy ra $dt = -2\sin x \cos x dx$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$

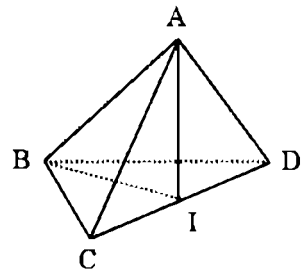
$$\text{Ta được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos^2 x} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_1^0 e^t dt = \frac{1}{2} (e - 1).$$

2. Giả sử (P) là mặt đối xứng của tứ diện đều $ABCD$, như thế phép đối xứng $\mathcal{D}_P$ biến tứ diện thành chính nó, do đó biến mỗi đỉnh thành một trong các đỉnh của tứ diện. Với đỉnh A ta có các trường hợp sau:

- Nếu $\mathcal{D}_P(A) = A$ thì trong ba đỉnh còn lại phải có một điểm bất động, nếu điểm đó là B thì (P) qua AB , hai điểm C và D đối xứng với nhau qua phép đối xứng $\mathcal{D}_P$ nên (P) là mặt trung trực của CD .
- Nếu $\mathcal{D}_P(A) = B$ thì (P) là mặt trung trực của AB ((P) qua CD).
- Nếu $\mathcal{D}_P(A) = C$ thì (P) là mặt trung trực của AC ((P) qua BD).
- Nếu $\mathcal{D}_P(A) = D$ thì (P) là mặt trung trực của AD ((P) qua BC).

Nếu thay A bằng B, C hoặc D thì ta có kết quả tương tự.

Tóm lại, tứ diện đều $ABCD$ có 6 mặt đối xứng, đó là 6 mặt trung trực của 6 cạnh.



Câu 4. Theo giả thiết $A(5; -1; 2), B(2; 2; 2), C(2; -1; 5)$.

- 1) Ta dễ tính được $AB = BC = CA = 3\sqrt{2}$

Vậy tam giác ABC đều.

- 2) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 0), \overrightarrow{AC} = (-3; 0; 3)$

Suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (9; 9; 9)$, cùng phương với $\vec{u} = (1; 1; 1)$

Vectơ $\vec{u}$ cũng là vectơ của mặt phẳng (ABC) . Phương trình của $mp(ABC)$:

$$1.(x - 5) + 1.(y + 1) + 1.(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 6 = 0.$$

Suy ra giao điểm của $mp(ABC)$ với các trục tọa độ là $M(6; 0; 0), N(0; 6; 0), P(0; 0; 6)$

Thể tích của phần không gian giới hạn $mp(ABC)$ và các mặt phẳng tọa độ là:

$$V = \frac{1}{6} OM.ON.OP = \frac{1}{6} 6.6.6 = 36.$$

- 3) Do ABC là tam giác đều, nên nếu gọi I là tâm của tam giác ABC thì $I(3; 0; 3)$

Gọi Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì Δ đi qua I và nhận $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình của trục Δ là:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $4^x + 2 = 2^x + 2^{1-x}$

$$4^x + 2 = 2^x + 2^{1-x} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 = 2^x + \frac{2}{2^x}$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), ta được phương trình:

$$t^2 + 2 - t - \frac{2}{t} = 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Như vậy $t = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

2. a) Gọi $O = AC \cap BD$, $I = MK \cap LN$

Dễ thấy ba điểm S, I, O thẳng hàng

Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$

Vì $ABCD$ là một hình bình hành nên:

$$S_{ABC} = S_{ADC} = S_{ABD} = S_{BCD}$$

$$\text{Do đó } V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{V}{2}$$

Ta có $V_{S.KLMN} = V_{S.KLM} + V_{S.KMN}$

$$= V_{S.KLN} + V_{S.LMN} \quad (1)$$

$$\bullet V_{S.KLM} + V_{S.KMN} = \left(\frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} + \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} \right) \cdot \frac{V}{2} \quad (2)$$

$$\bullet V_{S.KLN} + V_{S.LMN} = \left(\frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} + \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} \right) \cdot \frac{V}{2} \quad (3)$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} + \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} + \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD}$$

Nhân hai vế với $\frac{SA}{SK} \cdot \frac{SB}{SL} \cdot \frac{SC}{SM} \cdot \frac{SD}{SN}$

$$\text{Ta được: } \frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN} \quad (\text{đpcm}).$$

- b) Gọi V, V_1 là thể tích các khối chóp $S.ABCD$ và $S.KLMN$

Ta có: $V_{S.KLM} + V_{S.KMN} = V_{S.KLM} + V_{S.LMN}$

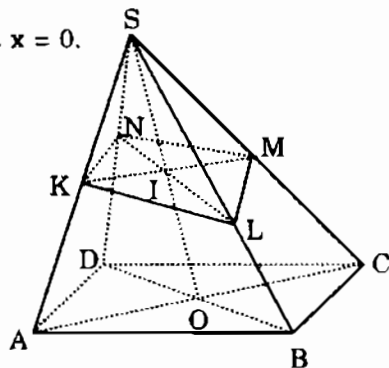
$$\text{Mà } V_{S.KLM} + V_{S.KMN} = \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot V_{S.ABC} + \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot V_{S.ADC}$$

$$V_{S.KLM} + V_{S.LMN} = \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SD} \cdot V_{S.ADB} + \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V_{S.BCD}$$

Như vậy ta có hệ thức:

$$\begin{aligned} & \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot V_{S.ABC} + \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot V_{S.ADC} \\ &= \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V_{S.ADB} + \frac{SL}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot V_{S.BCD} \end{aligned}$$

Suy ra:



$$\frac{SD}{SN} \cdot V_{S.ABC} + \frac{SB}{SL} \cdot V_{S.ADC} = \frac{SC}{SM} \cdot V_{S.ABD} + \frac{SA}{SK} \cdot V_{S.BCD} \quad (*)$$

Mà: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$; $V_{S.ADC} = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot h$

$$V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot h; \quad V_{S.BCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h$$

Nên từ (*) ta được:

$$\frac{SD}{SN} \cdot S_{ABC} + \frac{SB}{SL} \cdot S_{ADC} = \frac{SC}{SM} \cdot S_{ABD} + \frac{SA}{SK} \cdot S_{BCD} \quad (**)$$

Vậy hệ thức được chứng minh.

Lưu ý: Trong câu 2, đáy ABCD là tứ giác lồi. Nếu ABCD là hình bình hành thì ta có:

$$S_{ABC} = S_{ADC} = S_{ADB} = S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Hệ thức (**) trở thành:

$$\frac{SD}{SN} + \frac{SB}{SL} = \frac{SC}{SM} + \frac{SA}{SK}$$

Đó là hệ thức mà ta đã chứng minh trong câu 1.

ĐỀ 22

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - x^2$.
2. Chứng minh rằng với mọi $a \neq 0$ hệ phương trình sau có một nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{a^2}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{a^2}{x} \end{cases}$$

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.
2. Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 4mx + m^2 + 2} = 3x^2 - 4mx + m^2 + 1$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2 - \cos^2 x} dx$.

2. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B không nằm trên mặt phẳng (P). Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (P), xác định vị trí của M để $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(2; 3; 4). Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy, Oz.

- Viết phương trình của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S).
- Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 5.

- Giải phương trình $3 \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}} - 8 \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}} + 4 = 0$.
- Cho khối tứ diện OABC với OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một, biết OA = OB = 2a và OC = 4a. Một điểm M thay đổi trên cạnh OA, đặt OM = x (0 < x < 2a). Qua M dựng mặt phẳng (α) song song với AB và OC, mặt phẳng này cắt các cạnh OB, BC, AC lần lượt tại các điểm N, P, Q.
- Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính diện tích của nó theo a và x.
- Tính thể tích V của khối chóp O.MNPQ theo a và x.
- Xác định vị trí của M để V đạt giá trị lớn nhất.

Giải**Câu 1.**

- Khảo sát hàm số $y = 2x^3 - x^2$ (độc giả tự giải)
- Điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$. Ta có:

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{a^2}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{a^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y = y^2 + a^2 & (1) \\ 2xy^2 = x^2 + a^2 & (2) \end{cases}$$

Suy ra $x > 0$ và $y > 0$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$2xy(x - y) = y^2 - x^2 \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 2xy) = 0 \quad (3)$$

Mà $x > 0$ và $y > 0 \Rightarrow x + y + 2xy > 0$, nên từ (3) ta suy ra $x = y$.

Như vậy (1) và (2) cùng đưa đến một phương trình:

$$2x^3 = x^2 + a^2 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 = a^2 \quad (4).$$

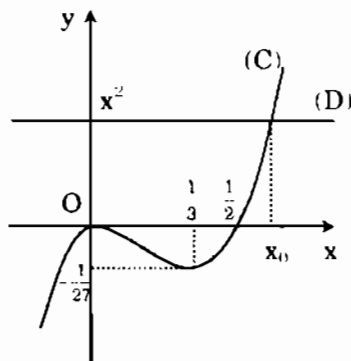
Đó là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (D): $y = a^2$.

Do $a \neq 0$ nên $a^2 > 0$. Dựa vào đồ thị ta thấy (C) và (D) có một giao điểm duy nhất. Suy ra phương trình (4) có một nghiệm duy nhất $x_0 > \frac{1}{2}$.

Vì $x = y$ nên hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Câu 2.

$$1. \sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} \quad (1)$$



Điều kiện: $\sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\bullet \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + m2\pi \Leftrightarrow x = m2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = m2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi$.

2. Xét phương trình $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 - 4mx + m^2 + 2} = 3x^2 - 4mx + m^2 + 1$

Để ý rằng $4x^2 - 4mx + m^2 + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (vì $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 + 2) = -8 < 0$)

Do đó tập xác định của phương trình $D = \mathbb{R}$

Đặt $b = x^2 + 1 > 0$, $a = 4x^2 - 4mx + m^2 + 2 > 0$ thì $a - b = 3x^2 - 4mx + m^2 + 1$

Do đó phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = a - b \Leftrightarrow \sqrt{a} + a = \sqrt{b} + b$$

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t} + t$, với $t \in (0; +\infty)$

Suy ra $f(a) = \sqrt{a} + a$ và $f(b) = \sqrt{b} + b$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Do đó, ta có:

$$\sqrt{a} + a = \sqrt{b} + b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4mx + m^2 + 1 = 0$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = 4m^2 - 3(m^2 + 1) = m^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{3} \text{ hoặc } m \geq \sqrt{3}$$

Vậy $m \leq -\sqrt{3}$ hoặc $m \geq \sqrt{3}$.

Câu 3.

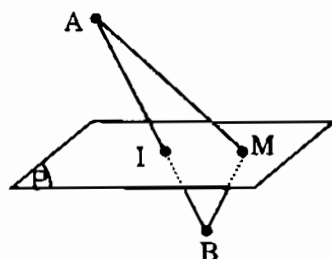
1. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2 - \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$

Đặt $t = 1 + \sin^2 x$. Suy ra $dt = \sin 2x dx$

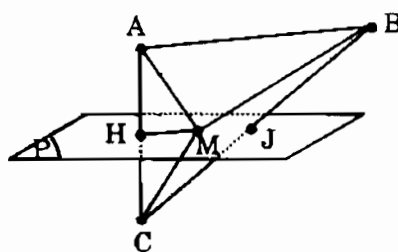
Khi $x = 0$ thì $t = 1$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 2$

$$\text{Ta được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2 - \cos^2 x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2.$$

2. Chia hai trường hợp:



Hình 1



Hình 2

(i) Trường hợp 1: Hai điểm A và B nằm khác phía đối với mặt phẳng (P). (Hình 1)

Gọi giao điểm của đoạn thẳng AB với mp(P) là I

Ta có $MA + MB \geq AB$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} M \text{ thuộc đoạn thẳng AB} \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv I$$

Vậy, khi M trùng với điểm I thì $\min(MA + MB) = AB$

(ii) Trường hợp 2: Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P). (Hình 2)

Đưa về trường hợp 1 bằng cách, thực hiện phép đối xứng $\mathcal{D}_P$ qua mặt phẳng (P).

Gọi $\mathcal{D}_P(A) = C$ thì $MA = MC$. Gọi J là giao điểm của đoạn thẳng BC với mp(P)

Ta có $MA + MB = MC + MB \geq BC$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} M \text{ thuộc đoạn thẳng BC} \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv J$$

Vậy, khi M trùng với điểm J thì $\min(MA + MB) = BC$, với C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (P).

Câu 4.

1. Vì A, B, C là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 3; 4)$ trên các trục Ox, Oy, Oz nên ta có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$

Phương trình của mặt cầu (S) có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

Do mặt cầu đi qua gốc tọa độ O và ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 4 + 4a = 0 \\ 9 + 6b = 0 \\ 16 + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = -1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z = 0$ (*)

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(1; \frac{3}{2}; 2\right)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

2. Gọi (T) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tâm J của (T) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (ABC).

Phương trình của mặt phẳng (ABC):

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (6; 4; 3)$.

Phương trình của đường thẳng Δ qua điểm I và vuông góc với mp(ABC):

$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = \frac{3}{2} + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Điểm J là giao điểm của Δ và mp(ABC), nên tọa độ của J ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$6(1 + 6t) + 4\left(\frac{3}{2} + 4t\right) + 3(2 + 3t) - 12 = 0 \Leftrightarrow 61t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{6}{61}$$

Suy ra $J\left(\frac{25}{61}; \frac{135}{122}; \frac{104}{61}\right)$

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABC):

$$d = d(I, (ABC)) = \frac{\left|6 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 2 - 12\right|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{61}}.$$

Câu 5.

1. $3 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} - 8 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} + 4 = 0$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} - 8 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} + 4 = 0$

Đặt $t = 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}}$ ($t > 0$)

Phương trình đã cho trở thành:

$$3t^2 - 8t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\bullet t = 2 \Leftrightarrow 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 9$$

$$\bullet t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{2} = \log_2\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x = (3 - 2\log_2 3)^2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 9$, $x = (3 - 2\log_2 3)^2$.

2. a) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) // AB, AB = (OAB) \cap (CAB) \\ (\alpha) \cap (OAB) = MN, (\alpha) \cap (CAB) = PQ \end{array} \right\} \Rightarrow MN // PQ // AB$$

Với $(\alpha) // OC$, lập luận tương tự ta được $MQ // NP // OC$

Do đó tứ giác $MNPQ$ là một hình bình hành

Mặt khác $OC \perp (OAB)$ và $MQ // OC \Rightarrow MQ \perp (OAB)$

Suy ra $MQ \perp MN$

Như vậy tứ giác $MNPQ$ là một hình chữ nhật

Tam giác OAB vuông cân tại O , mà

$MN // AB$ nên $\triangle OMN$ vuông cân tại

O . Do đó $MN = x\sqrt{2}$.

$$\text{Trong } \triangle OAC: MQ // OC \Rightarrow \frac{MQ}{OC} = \frac{AM}{AO}$$

$$\Rightarrow MQ = \frac{OC \cdot AM}{AO} = \frac{4a(2a - x)}{2a} = 2(2a - x)$$

$$\text{Ta được } S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = 2\sqrt{2}x(2a - x).$$

b) Gọi I là trung điểm của AB và H là giao điểm của OI với MN

Ta có $OH \perp MN$ và $OH \perp MQ \Rightarrow OH \perp (MNPQ)$

$$\text{Do đó } V = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2}x(2a - x) \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{2}{3}x^2(2a - x), (0 < x < 2a).$$

$$\text{c) Ta viết } V = \frac{1}{3}x \cdot x \cdot (4a - 2x)$$

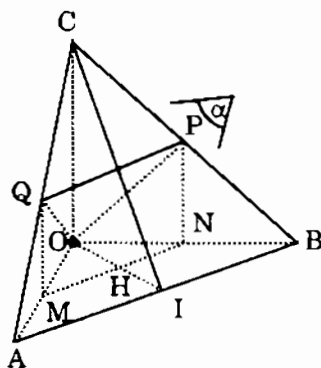
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$x \cdot x \cdot (4a - 2x) \leq \left(\frac{x + x + (4a - 2x)}{3} \right)^3 = \frac{64a^3}{27}$$

$$\text{Suy ra } V \leq \frac{64a^3}{81}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: } x = 4a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{4a}{3}$$

$$\text{Vậy } \max V = \frac{64a^3}{81} \text{ khi } x = OM = \frac{4a}{3}.$$



ĐỀ 23

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2(m - x) - m$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Xác định các giá trị của m để (C_m) cắt đường thẳng $(D): y = x + 2$ tại ba điểm phân biệt I, M, N , trong đó I là một điểm cố định. Tìm m để I là trung điểm của đoạn thẳng MN .
2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?
3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 3$.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.
2. Xác định m để bất phương trình sau được nghiệm đúng với mọi x :

$$x^2 - 2x + 2|x - 1| + m \geq 0$$

Câu 3.

1. Tính các tích phân:

a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$.

2. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B không nằm trên mặt phẳng (P) . Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (P) , xác định vị trí của M để $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0.$$

Mặt cầu (S) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ O).

1. Tính thể tích của khối tứ diện $OABC$.
2. Tính diện tích của tam giác ABC .

Câu 5.

1. Giải phương trình $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x \quad (1)$.
2. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Kẻ đường cao SH của khối chóp. Một điểm M thay đổi trên SH , đặt $HM = x$ ($0 < x < 2a$). Qua M dựng mặt phẳng (α) vuông góc với SH , (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm I, J, P, Q .
 - a) Tính thể tích V của khối chóp $H.IJPQ$ theo a, h và x .
 - b) Xác định vị trí của M để V đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Câu 1.

1. * Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (D) :

$$\begin{aligned} x^2(m-x) - m &= x + 2 \Leftrightarrow x^3 - mx^2 + x + m + 2 = 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - (m+1)x + m+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ g(x) = x^2 - (m+1)x + m+2 = 0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Suy ra $I(-1; 1)$ là một giao điểm của (C_m) và (D)

Biệt thức của (2): $\Delta = m^2 - 2m - 7$

Điều kiện để (C_m) và (D) cắt nhau tại ba điểm phân biệt I, M, N là phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác -1 , nghĩa là:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 2m - 7 > 0 \\ g(-1) = 2m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 - 2\sqrt{2} \text{ hoặc } m > 1 + 2\sqrt{2} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

* Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng MN, ta có:

$$x_J = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{m+1}{2}$$

Do vậy I là trung điểm của MN khi và chỉ khi:

$$x_J = x_I \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

2. Phương trình của hàm số viết lại $y = -x^3 + mx^2 - m$

Đạo hàm $y' = -3x^2 + 2mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2mx = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2m}{3}$

Điều kiện để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là:

$$y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_1 = 0 \leq x_2 = \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

3. Khi $m = 3$ phương trình của hàm số trở thành $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ (độc giả tự giải).

Câu 2.

1. Xét phương trình $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$ (*)

Điều kiện $2\cos x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 2$.

- i) Trước hết ta xét trường hợp $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Ta có } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + n2\pi \text{ (} n \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Lần lượt thế $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$ vào (*) ta dễ thấy phương trình được nghiệm đúng.

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là một họ nghiệm của phương trình (*).

ii) Khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ta đặt $t = \operatorname{tg} x$, ta có:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x (\operatorname{tg}^3 x + 1)}{2 - \operatorname{tg} x} = \cos 2x \Leftrightarrow \frac{t^3 + 1}{(1 + t^2)(2 - t)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ &\Leftrightarrow t^3 + 1 = (1 - t^2)(2 - t) \\ &\Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t = -1 \text{ hoặc } t = \frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow (x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \text{ hoặc } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + m\pi) \end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{4} + m\pi$;
 $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + m\pi$ ($k, m \in \mathbb{Z}$).

2. Xét bất phương trình $x^2 - 2x + 2|x - 1| + m \geq 0$

Viết bất phương trình đã cho dưới dạng:

$$(x - 1)^2 + 2|x - 1| + m - 1 \geq 0$$

Đặt $t = |x - 1| \geq 0$, ta được bất phương trình

$$t^2 + 2t + m - 1 \geq 0 \quad (t \geq 0) \quad (*)$$

Gọi $f(t) = t^2 + 2t + m - 1$

Biệt thức $\Delta' = 2 - m$

- Nếu $m \geq 2$ thì $\Delta' \leq 0$, khi đó bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$, nên cũng đúng với mọi $t \geq 0$.
- Nếu $m < 2$ thì $\Delta' > 0$, khi đó phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 ($t_1 < t_2$)

t	$-\infty$	t_1	t_2	$+\infty$		
f(t)	-	+	0	-	0	+

Do đó $f(t) \geq 0, \forall t \in (0; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$t_1 < t_2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} P = m - 1 \geq 0 \\ S = -2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Kết hợp với điều kiện $m < 2$, ta được $1 \leq m < 2$

Tóm lại nếu $m \geq 1$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x .

Câu 3.

1. a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

Đặt $t = \sin x$. Suy ra $dt = \cos x dx$

Khi $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{1}{2}$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta được } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1 - t^2}{t^2} dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = \left(-\frac{1}{t} - t \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

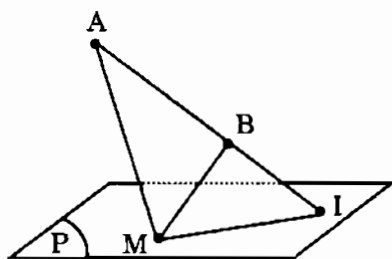
b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$

Đặt $t = \sin x$. Suy ra $dt = \cos x dx$

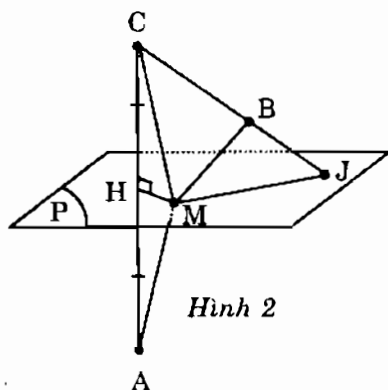
Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx &= \int_0^1 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int_0^1 t^2 (1 - t^2) dt = \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

2. Chia hai trường hợp:



Hình 1



Hình 2

(i) Trường hợp 1: Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P). (Hình 1)

Giả sử đường thẳng AB cắt mp(P), gọi giao điểm là I. Ta có $|MA - MB| \leq AB$. Đẳng thức xảy ra khi ba điểm M, A, B thẳng hàng và M nằm ngoài đoạn thẳng AB, nhưng M nằm trên mp(P), nên khi đó M là giao điểm của đường thẳng AB và mp(P), tức M trùng với điểm I

Vậy khi M trùng với điểm I thì $\max |MA - MB| = AB$

Nếu $d(A, (P)) = d(B, (P))$ thì $AB \parallel (P)$, bài toán không có nghiệm hình.

- (ii) *Trường hợp 2:* Hai điểm A và B nằm khác phía đối với mặt phẳng (P). (Hình 2)

Thực hiện phép đối xứng D_P qua mặt phẳng (P). Gọi $D_P(A) = C$ thì $MA = MC$. Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC với $mp(P)$. (nếu có)

Ta có $|MA - MB| = |MC - MB| \leq BC$. Theo trường hợp 1, khi M trùng với điểm J thì $\max |MA - MB| = BC$.

Nếu $d(A, (P)) = d(B, (P))$ thì $BC \parallel (P)$, bài toán không có nghiệm hình.

Câu 4. Xét mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (S) và trục Ox: $x^2 - 2x = 0$

Phương trình này có hai nghiệm: $x = 0, x = 2$. Suy ra $A(2; 0; 0)$.

Lập luận tương tự ta được $B(0; 4; 0), C(0; 0; 6)$.

1. Thể tích khối tứ diện OABC là:

$$V = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 8.$$

2. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; 0), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; 6)$. Do đó $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (24; 12; 8)$

Diện tích ΔABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{24^2 + 12^2 + 8^2} = 14.$$

Câu 5.

$$1. \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^x = 2^x \quad (1)$$

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right)^x = 1 \quad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số:

$$y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right)^x \quad (C) \text{ và } y = g(x) = 1 \quad (D)$$

Dễ thấy $A(2; 1)$ là một giao điểm của (C) và (D)

Mặt khác, do $0 < \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < 1$ và $0 < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < 1$ nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra đồ thị (C) và đường thẳng (D): $y = 1$ có nhiều nhất một giao điểm. Do vậy $A(2; 1)$ là giao điểm duy nhất của (C) và (D).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

2. a) Dễ thấy IJPQ là hình vuông đồng dạng với hình vuông ABCD với tỉ số đồng dạng $k = \frac{SM}{SH} = \frac{2a-x}{2a}$

$$\text{Do đó } S_{(IJPQ)} = \left(\frac{2a-x}{2a}\right)^2 \cdot S_{(ABCD)} = \left(\frac{2a-x}{2a}\right)^2 \cdot a^2 = \frac{(2a-x)^2}{4}$$

Thể tích khối chóp H.IJPQ là:

$$V = \frac{1}{3} S_{(IJPQ)} \cdot HM = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2a-x)^2}{4} \cdot x = \frac{x(2a-x)^2}{12}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{x(2a-x)^2}{12}$$

$$\text{b) Ta có thể viết } V = \frac{x(2a-x)^2}{12} = \frac{2x \cdot (2a-x) \cdot (2a-x)}{24}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$2x \cdot (2a-x) \cdot (2a-x) \leq \left(\frac{2x + (2a-x) + (2a-x)}{3}\right)^3 = \left(\frac{4a}{3}\right)^3 = \frac{64a^3}{27}$$

$$\text{Suy ra } V \leq \frac{8a^3}{81}$$

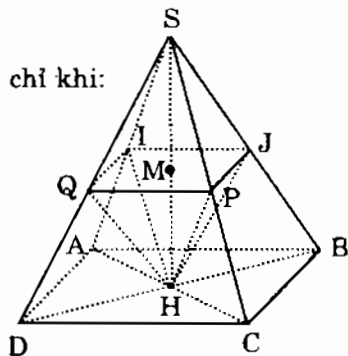
Do đó V đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{8a^3}{81}$ khi và chỉ khi:

$$2x = 2a - x \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$$

Vậy khi $HM = \frac{2a}{3}$ thì thể tích

khối chóp H.IJPQ có giá trị lớn

$$\text{nhất là } V_{\max} = \frac{8a^3}{81}.$$



ĐỀ 24

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$, trong đó a là một tham số.

- Tùy theo a , hãy xét sự biến thiên của hàm số.
- Xác định a để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $a = 0$.

Câu 2.

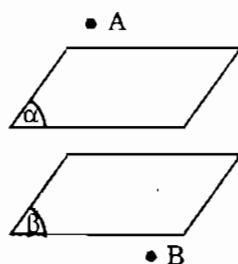
- Giải phương trình $3\sin x - \sqrt{4\sin^2 x - 1} = 2$.
- Tìm các giá trị của m để với mọi x ta đều có:

$$-3 \leq \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2$$

Câu 3.

- Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x dx$

2. Cho hai điểm A và B cố định không nằm trên hai mặt phẳng song song (α) và (β) sao cho đoạn thẳng AB cắt cả (α) và (β) (như hình vẽ). Hai điểm M và N thay đổi lần lượt trên (α) và (β) sao cho MN vuông góc với (α) , (β) . Xác định vị trí của M và N để tổng khoảng cách $AM + MN + NB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz

- Hãy viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(3; -4; 2)$, biết rằng (S) cắt trục Oz tại hai điểm A và B sao cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 6.
- Viết phương trình các tiếp diện của (S) tại A và B.

Câu 5.

- Giải phương trình $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 6$.
- Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Một điểm M thay đổi trên cạnh SC (khác với S và C), đặt $\frac{SM}{SC} = k$.
Dựng mặt phẳng (α) qua AM và song song với BD, mặt phẳng này cắt SB tại P và cắt SD tại Q.
a) Chứng minh rằng tứ giác APMQ có hai đường chéo vuông góc với nhau.
b) Với $k = \frac{1}{2}$, hãy tính thể tích khối chóp S.APMQ.
c) Xác định giá trị của k để mặt phẳng (α) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải

Câu 1.

- Xét hàm số $y = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 6[x^2 - (a+1)x + a]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6[x^2 - (a+1)x + a] = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = a$$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

- $a = 1: y' = 6(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	2	$+\infty$

(ii) $a > 1$:

x	$-\infty$		1		a		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		$3a - 1$		$3a^2 - a^3$		$+\infty$

(iii) $a < 1$:

x	$-\infty$		a		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		$3a^2 - a^3$		$3a - 1$		$+\infty$

2. Ta có $|f(x)| \leq 1$ khi $|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq f(1) \leq 1$

$-1 \leq f(1) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 3a - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{2}{3}$. Khi đó xảy ra trường hợp

(iii), do vậy hàm số có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 1]$ như sau:

x	$-\infty$		1		1		$+\infty$
y'		+	0	-			
y	$-\infty$		$3a^2 - a^3$		$3a - 1$		$+\infty$

Theo yêu cầu của bài toán, ta phải có:

$$f(-1) \geq -1 \Leftrightarrow -9a - 5 \geq -1 \Leftrightarrow a \leq -\frac{4}{9} \Rightarrow a \notin \left[0; \frac{2}{3}\right]$$

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn đề bài.

3. Khi $m = 0$ phương trình của hàm số trở thành $y = 2x^3 - 3x^2$
(độc giả tự giải)

Câu 2.

1. Xét phương trình $3\sin x - \sqrt{4\sin^2 x - 1} = 2$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{4\sin^2 x - 1} = 3\sin x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq \frac{2}{3} \\ 4\sin^2 x - 1 = (3\sin x - 2)^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 1 = 9\sin^2 x - 12\sin x + 4 \Leftrightarrow 5\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{6 + \sqrt{11}}{5} \text{ (loại)} \\ \sin x = \frac{6 - \sqrt{11}}{5} \text{ (không thỏa mãn điều kiện (1))} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. Xét bất phương trình $-3 \leq \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2$ (1)

Vì $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi x , nên:

$$(1) \Leftrightarrow -3(x^2 - x + 1) \leq x^2 + mx - 2 \leq 2(x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (m-3)x + 1 \geq 0 & (2) \\ x^2 - (m+2)x + 4 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

• (2) đúng với mọi x khi và chỉ khi:

$$\Delta_1 = (m-3)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 7 \text{ (a)}$$

• (3) đúng với mọi x khi và chỉ khi:

$$\Delta_2 = (m+2)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 2 \text{ (b)}$$

Từ (a) và (b) suy ra: $-1 \leq m \leq 2$.

Câu 3.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x dx$$

Đặt $t = \tan x$. Suy ra $dt = (1 + \tan^2 x)dx = (1 + t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta được } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x dx &= \int_0^1 \frac{t^5}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= \int_0^1 t^3 dt - \int_0^1 t dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 1} dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

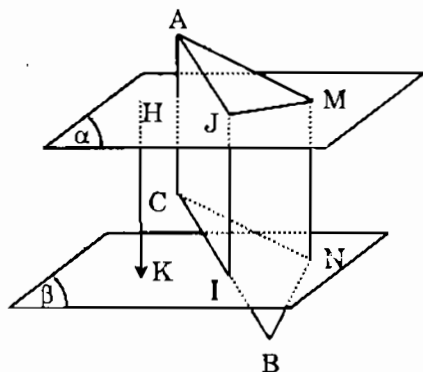
2. Lấy điểm $H \in (\alpha)$ và gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (β) , dễ thấy $MN = HK$.

Thực hiện phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{HK}$

Gọi $C = T(A)$ ta được $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} = \vec{u}$. Suy ra $MN = AC$ và $AM = CN$. Do đó:

$$AM + MN + NB = AC + CN + NB (*)$$

Vì AC không đổi nên từ (*) ta suy ra, $AM + MN + NB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $CN + NB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Theo kết quả Đề 22 – câu 3, thì $CN + NB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi N trùng với điểm I với I là giao điểm của đoạn thẳng BC và mặt phẳng (β) . Khi đó M trùng với điểm J với J là ảnh của I qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{KH}$.



Tóm lại: Nếu gọi $C = T(A)$, I là giao điểm của đoạn thẳng BC với mặt phẳng (β) , J là ảnh của I qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{KH}$ thì $AM + MN + NB$ đạt giá trị nhỏ nhất là $AC + CB$ khi $M \equiv J$ và $N \equiv I$.

Câu 4.

1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $I(3; -4; 2)$ trên trục Oz ta được $H(0; 0; 2)$ và $IH = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Dễ thấy H là trung điểm của AB nên $HA = 3$.

Suy ra bán kính của (S) : $R = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 34$

2. Cao độ của A và B nghiệm đúng phương trình

$$(-3)^2 + 4^2 + (z - 2)^2 = 34 \Leftrightarrow (z - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow z = 5 \text{ hoặc } z = -1.$$

Suy ra $A(0; 0; 5)$ và $B(0; 0; -1)$.

* Gọi (P) là tiếp diện của (S) tại A , $\vec{n}_P$ là vectơ pháp tuyến của (P) :

$$\vec{n}_P = \overrightarrow{IA} = (-3; 4; 3)$$

Phương trình của tiếp diện (P) :

$$-3(x - 0) + 4(y - 0) + 3(z - 5) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4y + 3z - 15 = 0$$

* Gọi (Q) là tiếp diện của (S) tại B , (Q) có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n}_Q = \overrightarrow{IB} = (-3; 4; -3)$$

Phương trình của tiếp diện (Q) :

$$-3(x - 0) + 4(y - 0) - 3(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3z + 3 = 0$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = 6$

$$\text{Đề ý rằng } \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = \frac{1}{(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x}$$

Đặt $t = (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x$ ($t > 0$), ta được phương trình

$$t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\bullet t = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\bullet t = 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x = 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \pm 2$.

2. a) Kẻ đường cao SH của khối chóp $S.ABCD$ thì H là giao điểm của AC và BD . Gọi I là giao điểm của AM và PQ , dễ thấy $I \in SH$.

Do $(\alpha) \parallel BD$ nên (α) cắt (SBD) theo giao tuyến $PQ \parallel BD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

Mà $PQ \parallel BD$ nên $PQ \perp (SAC)$, suy ra $PQ \perp AM$.

Vậy tứ giác $APMQ$ có hai đường chéo vuông góc.

Ngoài ra do H là trung điểm của BD nên I cũng là trung điểm của PQ, nghĩa là hai điểm P và Q đối xứng với nhau qua AM.

b) Nếu $k = \frac{1}{2}$ thì M là trung điểm của

SC, do đó I là trọng tâm của ΔSAC .

Trong ΔSBD : $PQ \parallel BD$

$$\Rightarrow \frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SD} = \frac{SI}{SH} = \frac{2}{3}$$

Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.APMQ$ và

V là thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có:

$$V_1 = 2V_{S.ABM} = 2 \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot V_{S.ABC} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{2} = \frac{1}{3}V$$

Mặt khác $V = \frac{1}{3} \cdot S_{(ABCD)} \cdot SH$, trong đó:

$$\bullet S_{(ABCD)} = a^2$$

$$\bullet SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

$$\text{Do đó } V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}. \text{ Vậy } V_1 = \frac{a^3\sqrt{14}}{18}.$$

c) Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên AC.

$$\text{Trong } \Delta SHC: MK \parallel SH \Rightarrow \frac{MK}{SH} = \frac{CM}{CS} = 1 - k \quad (1)$$

Trong ΔAMK : $IH \parallel MK$

$$\Rightarrow \frac{MK}{IH} = \frac{AK}{AH} = \frac{AH + HK}{AH} = 1 + \frac{HK}{HC} = 1 + k \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) cho: } \frac{IH}{SH} = \frac{1-k}{1+k} \Rightarrow \frac{SI}{SH} = 1 - \frac{1-k}{1+k} = \frac{2k}{1+k}$$

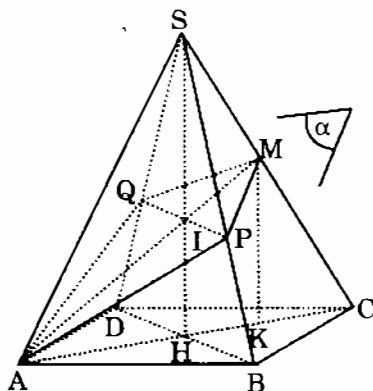
$$\text{Trong } \Delta SBD: PN \parallel BD \Rightarrow \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{SI}{SH} = \frac{2k}{1+k}$$

$$\text{Ta có } V_1 = 2V_{S.ABM} = 2 \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot V_{S.ABC} = 2 \cdot \frac{2k}{1+k} \cdot k \cdot \frac{V}{2} = \frac{2k^2}{1+k}V$$

Theo yêu cầu đề bài ta cần có:

$$\frac{2k^2}{k+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4k^2 - k - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \\ k = \frac{1-\sqrt{17}}{8} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy nếu $k = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ thì mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.



ĐỀ 25

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + mx^2 - 1$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại và cực tiểu.
2. Chứng minh rằng với mọi m , phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.
3. Xác định m để phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$.
2. Giải phương trình: $e^{x^2-1} - e^{2x-x-1} = x^2 + x - 2$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$.
2. Tìm tất cả các trục đối xứng của tứ diện đều ABCD.

Câu 4.

1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $G(1; 2; 3)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua G cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho $\triangle ABC$ nhận G làm trọng tâm. Viết phương trình của mặt phẳng (α) .
 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $H(2; 1; 1)$. Gọi (β) là mặt phẳng qua H cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhận H làm trọng tâm. Viết phương trình của mặt phẳng (β) .
- (hai câu trên độc lập với nhau)

Câu 5.

1. Giải phương trình $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$
2. Cho ba tia Ox, Oy, Oz có ba góc tại O đều bằng 60° . Trên Ox, Oy, Oz lấy lần lượt các điểm A, B, C với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.
 - a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông góc tại A là $2a^2 - (b+c)a + bc = 0$
 - b) Cho biết a , tổng $b+c = p$ và góc $\widehat{BAC}$ vuông. Tính thể tích khối tứ diện OABC theo a và p .

Giải

Câu 1.

1. $y = x^3 + mx^2 - 1$
 $y' = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m)$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2m}{3}$

Điều kiện để hàm số đạt cực đại và cực tiểu là phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua hai nghiệm đó, nghĩa là:

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 0 \neq -\frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \neq 0$$

Vậy khi $m \neq 0$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu.

2. Hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - 1$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $f(0) = -1 < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + mx^2 - 1) = +\infty$$

Do đó tồn tại số $x_0 > 0$ (x_0 đủ lớn) sao cho $f(x_0) > 0$.

Suy ra $f(0).f(x_0) < 0$. Mặt khác $f(x)$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên đoạn $[0; x_0]$, như vậy tồn tại số $c \in (0; x_0)$ sao cho $f(c) = 0$.

Vậy với mọi m , phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

3. Ta chia ra ba trường hợp:

(i) $m = 0$: phương trình $f(x) = 0$ trở thành $x^3 - 1 = 0$, phương trình này có một nghiệm duy nhất $x = 1$

(ii) $m < 0$:

x	$-\infty$		0		$-\frac{2m}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		-1		m		$+\infty$

Dựa vào bảng ta thấy trong trường hợp này, phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất.

(iii) $m > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{2m}{3}$		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		M		-1		$+\infty$

Trong đó $M = f\left(-\frac{2m}{3}\right) = \frac{4}{27}m^3 - 1$.

Trong trường hợp này, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất khi:

$$M < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{27}m^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \quad (m > 0)$$

Tóm lại khi $m < \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$ (*)

Điều kiện $\begin{cases} x \neq k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Với điều kiện đó:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x \Leftrightarrow \frac{2\sin x \cos x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \frac{2\sin x}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin x} = 8\cos x \end{cases}$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{2\sin x}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin x} &= 8\cos x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos 2x = 8\sin x \cos x \cos 2x \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x) = 8\sin x \cos x \cos 2x \Leftrightarrow 8\sin x \cos x \cos 2x = 1 \\ &\Leftrightarrow 4\sin 2x \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin 4x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + n\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{24} + n\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{2} + m\pi, x = \frac{\pi}{24} + n\frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{24} + n\frac{\pi}{2} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

2. Xét phương trình $e^{x^2-1} - e^{2x^2+x-1} = x^2 + x - 2$

Tập xác định của phương trình $D = \mathbb{R}$.

Đặt $a = 2x^2 + x - 1$, $b = x^2 + 1$, suy ra $a - b = x^2 + x - 2$

Phương trình đã cho trở thành:

$$e^b - e^a = a - b \Leftrightarrow e^a + a = e^b + b$$

Xét hàm số $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(a) = e^a + a$ và $f(b) = e^b + b$

Ta có $f'(x) = e^x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Do vậy hàm số $f(x) = e^x + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra: $e^a + a = e^b + b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a - b = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = -2$.

Câu 3.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$

Đặt $t = \tan x$.

Suy ra: $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx &= \int_0^1 \frac{t^6}{1+t^2} dt = \int_0^1 (t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}) dt \\&= \int_0^1 t^4 dt - \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\&= \left. \frac{t^5}{5} \right|_0^1 - \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 + t \Big|_0^1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Vậy: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

2. Giả sử a là trục đối xứng của tứ diện đều $ABCD$. Như thế phép đối xứng D_a biến $ABCD$ thành chính nó.

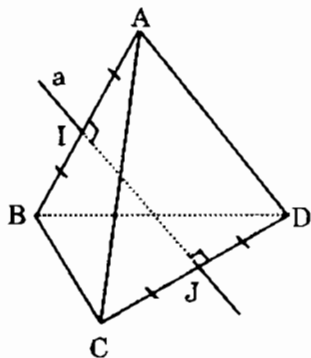
Nhận xét rằng, trục đối xứng a không chứa cạnh nào và cũng không nằm trên mặt nào của tứ diện (*)

Phép đối xứng D_a sẽ biến mỗi đỉnh thành một trong các đỉnh của tứ diện.

Ta xét ảnh $D_a(A)$ của đỉnh A :

- Nếu $D_a(A) = A$ thì trong ba đỉnh còn lại phải có một điểm bất động, giả sử $D_a(B) = B$, khi đó a là đường thẳng AB (trái với điều kiện (*)). Nếu $D_a(C) = C$ hoặc $D_a(D) = D$ thì cũng có kết quả tương tự.
- Nếu $D_a(A) = B$ thì a là trung trực của đoạn thẳng AB , trường hợp này ta phải có $D_a(C) = D$ và $D_a(D) = C$ nên a cũng là trung trực của CD . Suy ra a là đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD .

Thay đổi đỉnh A ta tìm được tất cả ba trục đối xứng của tứ diện đều $ABCD$, đó là ba đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối của tứ diện.



Câu 4.

1. Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Vì $G(1; 2; 3)$ là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{a+0+0}{3} = 1 \\ y_G = \frac{0+b+0}{3} = 2 \\ z_G = \frac{0+0+c}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow A(3; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 9)$$

Phương trình của $mp(\alpha)$ là:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$$

2. Trước hết ta chứng minh rằng $OH \perp$ mặt phẳng (β)

Kéo dài CH cắt AB tại điểm I . Do H là trực tâm của ΔABC nên $CI \perp AB$.

Từ giả thiết ta có:

$$OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB.$$

$$\text{Suy ra } AB \perp (OCI) \Rightarrow AB \perp OH.$$

Chứng minh tương tự ta được $BC \perp OH$

Do vậy: $OH \perp (ABC)$ hay $OH \perp mp(\beta)$.

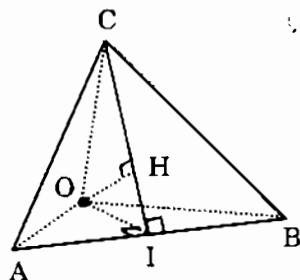
Tóm lại, từ giả thiết ta suy ra được (β)

là mặt phẳng vuông góc với OH tại điểm H .

Một vectơ pháp tuyến của (β) là: $\vec{n} = \vec{OH} = (2; 1; 1)$.

Phương trình của mặt phẳng (β) là:

$$2(x - 2) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 6 = 0$$



Câu 5.

1. Xét phương trình $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$8 \cdot 2^{-2x} - 6 \cdot 2^{-x} + 1 = 0$$

Đặt $t = 2^{-x}$ ($t > 0$), ta được phương trình

$$8t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ hoặc } t = \frac{1}{4}.$$

$$\bullet t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1, x = 2$.

2. a) Áp dụng định lý hàm số cosin:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \widehat{AOB}$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Tương tự: $BC^2 = b^2 + c^2 - bc,$

$$AC^2 = a^2 + c^2 - ac$$

Do đó ΔABC vuông tại A khi và chỉ khi:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

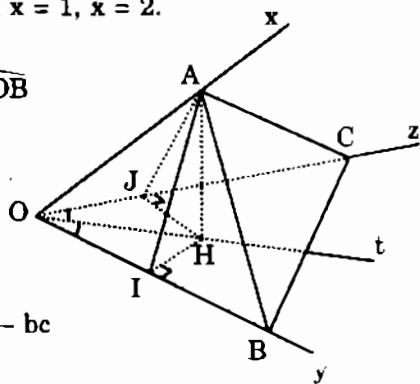
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab + a^2 + c^2 - ac = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - (b + c)a + bc = 0$$

Vậy điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông góc tại A là:

$$2a^2 - (b + c)a + bc = 0$$

- b) Từ A hạ AH vuông góc với $mp(Oyz)$ tại H . Gọi I và J lần lượt là hình



chiều vuông góc của H trên Oy và Oz. Theo định lý ba đường vuông góc ta có $HI \perp Oy$ và $HJ \perp Oz$.

Ta có $AI = OA \cos \widehat{AOB} = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$. Tương tự $AJ = \frac{a}{2}$. Suy ra hai tam giác vuông AHI và AHJ bằng nhau, do đó $HI = HJ$. Như vậy H nằm trên phân giác góc $\widehat{BOC}$, từ đó $\widehat{HOI} = 30^\circ$. Từ $\triangle OHI$ vuông tại H:

$$OH = \frac{OI}{\cos \widehat{HOI}} = \frac{a}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Từ $\triangle AHO$ vuông tại H:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Gọi V là thể tích khối tứ diện OABC ta có:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_{(OBC)} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \widehat{BOC} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{1}{6} bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}abc}{12} \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có $2a^2 - (b+c)a + bc = 0$ với $b+c=p$, do đó:

$$2a^2 - pa + bc = 0 \Rightarrow bc = a(p-2a), (p > 2a)$$

$$\text{Vậy } V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^2(p-2a).$$

ĐỀ 26

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - x^2 + 18ax - 2a$ với a là một tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $a = 0$.
2. Xác định a để phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt đều dương.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\tan^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin|x|}$
2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{a}{x} + 1} - e \right)$, ($a \neq 0$)

Câu 3. 1. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

2. Cho $x, y \in \left[0; \frac{10}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = (1 - \sin x)(1 - \cos y)(2 \sin x + \cos y).$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với $A(1; 0; 4)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 3; -1)$.

1. Viết phương trình của mặt phẳng (α) qua trọng tâm G của tứ diện ABCD đồng thời song song với AB và CD.

2. Mặt phẳng (α) cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến Δ , viết phương trình của Δ .

Câu 5.

1. Giải phương trình $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} = \frac{101}{10(2 - \sqrt{3})}$
2. Cho khối tứ diện ABCD có một cạnh độ dài lớn hơn 1, các cạnh còn lại có độ dài không vượt quá 1. Gọi V là thể tích khối tứ diện ABCD, chứng minh rằng $V \leq \frac{1}{8}$.

Giải

Câu 1.

1. Khi $a = 0$ phương trình hàm số trở thành $y = x^3 - x^2$.
(độc giả tự giải)

$$2. y = f(x) = x^3 - x^2 + 18ax - 2a$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2x + 18a$$

$$\Delta' = 1 - 54a$$

Điều kiện để phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt dương là hàm số $f(x)$ có cực đại và cực tiểu (gọi điểm cực đại là x_1 , điểm cực tiểu là x_2) và thỏa mãn hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ 0 < x_1 < x_2 & (2) \\ f(x_1) > 0 & (3) \\ f(x_2) < 0 & (4) \\ f(0) < 0 & (5) \end{cases}$$

$$\bullet f(0) < 0 \Leftrightarrow a > 0$$

$$\bullet \Delta' = 1 - 54a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{54}$$

Với điều kiện này, ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{1 - 54a}}{3} \\ x = \frac{1 + \sqrt{1 - 54a}}{3} \end{cases}. \text{ Suy ra } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 54a}}{3}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 54a}}{3}$$

$$\bullet x_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1 - 54a}}{3} > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{54}$$

• Bằng cách chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được:

$$f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) + \frac{2}{9} x(54a - 1)$$

$$\text{Suy ra } f(x_1) = \frac{2}{9} x_1(54a - 1)$$

$$\text{Do đó } f(x_1) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}x_1(54a - 1) > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{54} \text{ (vì } x_1 > 0)$$

Vậy không có giá trị nào của a để phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt dương.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\tan^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin|x|}$ (1)

Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin|x|} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin|x|}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x) \left(\frac{1 + \cos x}{1 - \sin^2 x} - \frac{1}{1 - \sin|x|} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \frac{1 + \cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin|x|} \end{cases}$$

i) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = m2\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$): nhận

ii) Xét phương trình $\frac{1 + \cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin|x|}$ (2)

• $x = 0$: phương trình không nghiệm đúng

• $x > 0$: (2) $\Rightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \sin x} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} = 1 \Leftrightarrow \sin x = \cos x$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + p\pi \text{ (với } p \in \mathbb{N})$$

• $x < 0$: (2) $\Rightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin x} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} = 1 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x$

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + p\pi \text{ (với } p \in \mathbb{N})$$

Vậy phương trình có các họ nghiệm là:

$$x = m2\pi, x = \frac{\pi}{4} + p\pi, x = -\frac{\pi}{4} - p\pi \text{ (} m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N})$$

2. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{a}{x}-1} - e)$, ($a \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{a}{x}-1} - e) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ex(e^{\frac{a}{x}} - 1)$$

Đặt $t = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{t}$

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $t \rightarrow 0$, do đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{a}{x}-1} - e) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(ea \cdot \frac{e^t - 1}{t} \right) = ea$$

Câu 3.

1. Tính $\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

Đặt $t = \sqrt{x}$. Suy ra $t^2 = x \Rightarrow dx = 2t dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và $x = 1$ thì $t = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 \frac{t^3+t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln(1+t) \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4\ln 2 \end{aligned}$$

2. $A = (1 - \sin x)(1 - \cos y)(2\sin x + \cos y)$.

Do $x, y \in [0; \frac{\pi}{2}]$ nên $1 - \sin x, 1 - \cos y, 2\sin x + \cos y$ là các số không âm.

Ta có thể viết:

$$A = \frac{1}{2} (2 - 2\sin x)(1 - \cos y)(2\sin x + \cos y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si:

$$\begin{aligned} &(2 - 2\sin x)(1 - \cos y)(2\sin x + \cos y) \\ &\leq \left(\frac{(2 - 2\sin x) + (1 - \cos y) + (2\sin x + \cos y)}{3} \right)^3 = 1 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$2 - 2\sin x = 1 - \cos y = 2\sin x + \cos y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ta được $A \leq \frac{1}{2}$

Vậy $\max A = \frac{1}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{6}$ và $y = \frac{\pi}{2}$

Câu 4. $A(1; 0; 4), B(1; 1; 0), C(0; 0; 1), D(-2; 3; -1)$

1. Tọa độ trọng tâm G của tứ diện:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1+1+0-2}{4} = 0 \\ y_G = \frac{0+1+0+3}{4} = 1 \\ z_G = \frac{4+0+1-1}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(0; 1; 1)$$

Mặt phẳng (α) là mặt qua G song song với AB và CD nên có cặp vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 1; -4), \overrightarrow{CD} = (-2; 3; -2)$.

Một vectơ pháp tuyến của (α) : $\vec{n} = [\overline{AB}, \overline{CD}] = (10; 8; 2)$, cùng phương với $\vec{u} = (5; 4; 1)$

Phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$5(x - 0) + 4(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 5x + 4y + z - 5 = 0$$

2. Vì Δ là giao tuyến của (α) và (Oxy) nên các điểm nằm trên Δ có tọa độ nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x + 4y + z - 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Cho $y = 5t$, ta suy ra $x = -4t + 1$. Vậy phương trình của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = 5t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} = \frac{101}{10(2 - \sqrt{3})}$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$10(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} + 10(2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x} - 101 = 0$$

Đặt y rằng $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} \cdot (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = 1 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x}}$

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x}$. Vì $x^2 - 2x \geq -1 \Rightarrow t \geq (2 + \sqrt{3})^{-1} = 2 - \sqrt{3}$

Ta được phương trình:

$$10t^2 - 101t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = \frac{1}{10} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Như vậy $t = 10 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x = \log_a 10$ (với $a = 2 + \sqrt{3}$)
 $\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 + \log_a 10}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{1 + \log_a 10}$

2. Ta xét tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ độ dài một cạnh lớn hơn 1, các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Như vậy:

$$V_{ABCD} \leq \max(V_{A_1B_1C_1D_1})$$

Ta có thể giả sử $A_1B_1 = AB = x > 1$ và các cạnh khác của $A_1B_1C_1D_1$ có độ dài đều bằng 1.

Kẻ đường cao C_1H của khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$. Do $C_1A_1 = C_1B_1 = C_1D_1 = 1$ nên H là tâm của $\Delta A_1B_1D_1$

Tam giác $A_1B_1D_1$ cân tại D_1 nên H nằm trên đường cao D_1I của $\Delta A_1B_1D_1$.

Ta có:

$$D_1I = \sqrt{B_1D_1^2 - IB_1^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{Mà } S_{A_1B_1D_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot D_1I = \frac{1}{4}x\sqrt{4-x^2}$$

$$\text{và } S_{A_1B_1D_1} = \frac{abc}{4R} = \frac{1 \cdot 1 \cdot x}{4R} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

(R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp của $\Delta A_1B_1D_1$)

$$\text{Suy ra } HD_1 = R = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Từ ΔC_1HD_1 vuông tại H:

$$C_1H^2 = C_1D_1^2 - HD_1^2 = 1 - \frac{1}{4-x^2} = \frac{3-x^2}{4-x^2}$$

$$\Rightarrow C_1H = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$$

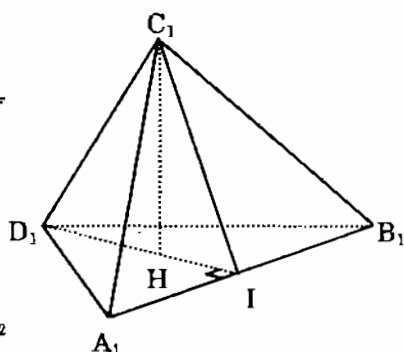
$$\text{Do đó } V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot x\sqrt{4-x^2} \cdot \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{12}x\sqrt{3-x^2} = \frac{1}{12}\sqrt{x^2(3-x^2)}$$

Vì $x^2 + (3-x^2) = 3$ (hằng số), nên $x^2(4-x^2)$ đạt giá trị lớn nhất khi:

$$x^2 = 3-x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Khi đó $V_{A_1B_1C_1D_1}$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{8}$.

Vậy $V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi khối tứ diện ABCD có một cạnh có độ dài bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1.



ĐỀ 27

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x + 2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -9x$.
3. Một đường thẳng (D) đi qua điểm $A(2; 0)$ và có hệ số góc bằng m. Xác định giá trị của m để đường thẳng (D) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 7x \sqrt{\frac{1}{\cos 7x} - 1} = 1$
2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{1+ax} - e^{1-bx}}{x} \right)$, ($a \neq 0, b \neq 0$)

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^1 x^7 \sqrt[3]{1-x^4} dx$

2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a) (p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{abc}{8}$$

$$b) \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

trong đó p là nửa chu vi của tam giác đó

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(6; -2; 3)$, $B(0; 1; 6)$, $C(2; 0; -1)$.

1. Tính diện tích của tam giác ABC.
2. Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

Câu 5.

1. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$4^x - m \cdot 2^{x+1} + m = 0$$

2. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên Ox, Oy, Oz lấy lần lượt các điểm A, B, C. Cho biết $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{zOx} = \gamma$, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ với α, β, γ đều là góc nhọn.

- a) Hãy tính thể tích V của khối tứ diện OABC theo $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$.
- b) Giả sử A, B, C di động sao cho $a + b + c = 3k$ (k là một hằng số dương). Tìm giá trị lớn nhất của V.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số. (độc giả tự giải)
2. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -9x$, thì Δ có hệ số góc bằng -9 , nên phương trình có dạng $y = g(x) = -9x + b$ ($b \neq 0$).
Giả sử Δ tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm M_0 có hoành độ x_0 thì x_0 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_0^3 + 3x_0 + 2 = -9x_0 + b \\ 3x_0^2 + 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -x_0^3 + 12x_0 + 2 \\ x_0 = \pm 2 \end{cases}$$

Suy ra $b = 16$ hoặc $b = -14$

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến là:

$$y = -9x + 16 \text{ và } y = -9x - 14.$$

3. Đường thẳng (D) đi qua điểm $A(2; 0)$ và có hệ số góc m nên phương trình có dạng $y = m(x - 2)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D):

$$-x^3 + 3x + 2 = m(x - 2) \Leftrightarrow x^3 + (m - 3)x - 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

Ta cần xác định m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt.

$$(1) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = x^2 + 2x + m + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là:

$$\begin{cases} g(2) \neq 0 \\ \Delta' = -m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 9 \neq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m < 0 \text{ và } m \neq -9)$$

Vậy nếu $m < 0$ và $m \neq -9$ thì đường thẳng (D) cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 7x \sqrt{\frac{1}{\cos 7x} - 1} = 1$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\begin{aligned} \cos x \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} + \cos 7x \sqrt{\frac{1 - \cos 7x}{\cos 7x}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\cos x(1 - \cos x)} + \sqrt{\cos 7x(1 - \cos 7x)} &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Điều kiện $\cos x > 0$ và $\cos 7x > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x(1 - \cos x)} &\leq \frac{\cos x + (1 - \cos x)}{2} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\cos 7x(1 - \cos 7x)} &\leq \frac{\cos 7x + (1 - \cos 7x)}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{\cos x(1 - \cos x)} + \sqrt{\cos 7x(1 - \cos 7x)} \leq 1$.

Do vậy phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x(1 - \cos x)} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\cos 7x(1 - \cos 7x)} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 - \cos x \\ \cos 7x = 1 - \cos 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos 7x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

Nhận thấy rằng $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ nghiệm đúng phương trình $\cos 7x = \frac{1}{2}$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{1+ax} - e^{1+bx}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e \cdot \frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x} \right)$
 $= ea \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \right) - eb \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{bx} - 1}{bx} \right) = e(a - b)$

Câu 3.

1. Tính $\int_0^1 x^7 \sqrt[3]{1 - x^4} dx$

Đặt $t = \sqrt[3]{1 - x^4}$. Suy ra $t^3 = 1 - x^4 \Rightarrow x^3 dx = -\frac{3}{4} t^2 dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$ và khi $x = 1$ thì $t = 0$

$$\begin{aligned}\text{Ta được: } \int_0^1 x^7 \sqrt[3]{1-x^4} dx &= \frac{3}{4} \int_0^1 (1-t^3) \cdot t \cdot t^2 dt = \frac{3}{4} \int_0^1 (t^3 - t^6) dt \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{112}\end{aligned}$$

2. a) Bất đẳng thức $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ (1) tương đương với bất đẳng thức:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad (2)$$

Đặt $x = b+c-a > 0$, $y = c+a-b > 0$, $z = a+b-c > 0$

$$\text{Suy ra } a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{z+x}{2}, c = \frac{x+y}{2}$$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow (y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz$ (3)

Dùng bất đẳng thức Côsi với hai số không âm, ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức (3) là đúng.

Vậy bất đẳng thức $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b) Trước hết ta chú ý rằng với hai số dương α, β ta luôn có:

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \quad \text{và} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}}$$

$$\text{Do đó } (\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha + \beta}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta$.

Áp dụng kết quả này, ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a) + (p-b)} = \frac{4}{c}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}, \quad \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$$

Cộng vế ta được:

$$\begin{aligned}2 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) &\geq 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} &\geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Câu 4. $A(6; -2; 3)$, $B(0; 1; 6)$, $C(2; 0; -1)$

$$1. \overline{AB} = (-6; 3; 3), \overline{AC} = (-4; 2; -4) \Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] = (-18; -36; 0)$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = 9\sqrt{5}$$

2. Điểm $H(x; y; z)$ là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ M \in mp(ABC) \\ \overline{BH} \perp \overline{AC} \end{cases}$$

- $\overline{AH} = (x - 6; y + 2; z - 3)$, $\overline{BC} = (2; -1; -7)$
 $\overline{AH} \perp \overline{BC} \Leftrightarrow 2(x - 6) - 1(y + 2) - 7(z - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow 2x - y - 7z + 7 = 0$
- $\overline{BH} = (x; y - 1; z - 6)$, $\overline{AC} = (-4; 2; -4)$
 $\overline{BH} \perp \overline{AC} \Leftrightarrow -4x + 2(y - 1) - 4(z - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 11 = 0$
- Vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC): $\vec{n} = [\overline{AC}, \overline{BC}] = (-18; -36; 0)$, $\vec{n}$ cùng phương với $\vec{v} = (1; 2; 0)$.

Phương trình của mặt phẳng (ABC):

$$1.(x - 6) + 2.(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

Như vậy tọa độ của H nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y - 7z + 7 = 0 \\ 2x - y + 2z - 11 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{5}, y = -\frac{3}{5}, z = 2 \end{cases}$$

Vậy trực tâm của tam giác ABC là $H\left(\frac{16}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $4^x - m.2^{x+1} + m = 0$

Đặt $t = 2^x$, phương trình trở thành:

$$t^2 - 2mt + m = 0 (*)$$

Ta cần xác định m để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm $t > 0$. Điều kiện có nghiệm của phương trình (*):

$$\Delta' = m^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1.$$

- $m = 0$: phương trình (*) chỉ có một nghiệm $t = 0$ (loại)
- $m < 0$: phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 với $t_1 < 0 < t_2$. Nghiệm t_2 thích hợp.
- $m \geq 1$: phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 ($t_1 \leq t_2$) với

$$\begin{cases} S = 2m > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < t_1 \leq t_2; \text{ cả hai nghiệm đều thích hợp.}$$

Vậy đáp số là $m < 0$ hoặc $m \geq 1$.

2. a) Tính thể tích V của khối tứ diện OABC.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\beta \geq \alpha$ và $\beta \geq \gamma$. Vì α, β, γ là các góc nhọn nên nếu gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $mp(OBC)$ thì H nằm trong miền góc yOz .

Gọi I, J là hình chiếu vuông góc của A trên Oy, Oz .

Áp dụng định lý ba đường vuông góc ta được

$HI \perp OB$ và $HJ \perp OC$

Ta có $V = \frac{1}{3} S_{OBC} \cdot AH$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \widehat{BOC} = \frac{1}{2} bc \sin \beta$$

Tam giác OHA vuông tại H cho $AH^2 = OA^2 - OH^2$

Để thấy tứ giác OIHJ nội tiếp trong đường tròn đường kính OH.

Tam giác OIA vuông tại I $\Rightarrow OI = OA \cos \widehat{IOA} = a \cos \alpha$.

Tam giác OJA vuông tại J $\Rightarrow OJ = OA \cos \widehat{JOA} = a \cos \gamma$.

Áp dụng định lý hàm số Cô-sin trong tam giác OIJ:

$$\begin{aligned} IJ^2 &= OI^2 + OJ^2 - 2OI \cdot OJ \cdot \cos \beta \\ &= a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \cos^2 \gamma - 2a \cos \alpha \cdot a \cos \gamma \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

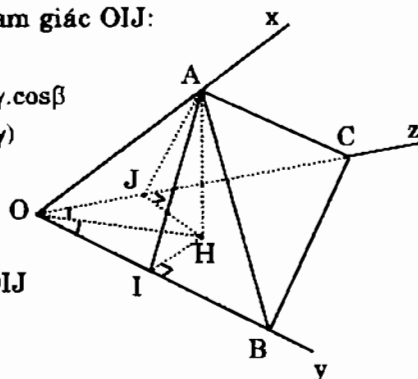
$$IJ^2 = a^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

Để ý rằng đường tròn ngoại tiếp

$\triangle OIJ$ chính là đường tròn đường kính OH (trong mp(Oyz))

Áp dụng định lý hàm số sin trong $\triangle OIJ$

ta được $\frac{IJ}{\sin \beta} = 2R = OH$



Do đó: $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{\sin^2 \beta} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$

$$AH^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \beta} [(1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)]$$

Suy ra $AH = \frac{a}{\sin \beta} \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$

Vậy thể tích khối tứ diện OABC là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \sin \beta \cdot \frac{a}{\sin \beta} \cdot \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

$$V = \frac{1}{6} abc \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \quad (*)$$

b) Từ (*) ta thấy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi abc lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = k$ suy ra $abc \leq k^3$ (hằng số)

Do đó abc lớn nhất bằng k^3 khi $a = b = c = k$

Vậy khi $a = b = c = k$ thì V đạt giá trị lớn nhất là:

$$\max V = \frac{k^3}{6} \sqrt{1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

ĐỀ 28

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3(2a + 1)x^2 + 6a(a + 1)x + 1$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $a = 1$.
2. Chứng minh rằng với mọi a , hàm số $f(x)$ có hai cực trị đạt tại các điểm x_1 và x_2 sao cho $|x_1 - x_2|$ có giá trị không phụ thuộc vào a .

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.
2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x}$.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_1^0 \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x + 4} dx$
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2 + 4x - 6$. Tam giác ABC có các đỉnh nằm trên (P) với $A(-3; -9)$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C để tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $P(3; 1; -1)$, $Q(2; -1; 4)$.

1. Viết phương trình của đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng PQ trên mặt phẳng (Oyz).
2. Viết phương trình của mặt phẳng qua hai điểm P, Q và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Câu 5.

1. Giải phương trình $5^{2(x - \log_5 x)} - 2 = 5^{x - \log_5 2}$
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.
 - a) Chứng minh bảy điểm A, B, C, D, I, J, K cùng nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích của mặt cầu đó.
 - b) Gọi (T) là đường tròn có đường kính là AC nằm trên mặt phẳng (SAC). Trên (T) lấy điểm M bất kì (khác A và C). Chứng minh rằng MBD là một tam giác vuông.

Giải

Câu 1.

1. Khi $a = 1$: phương trình của hàm số trở thành $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ (độc giả tự giải)
2. Xét hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3(2a + 1)x^2 + 6a(a + 1)x + 1$
 $f'(x) = 6[x^2 - (2a + 1)x + a(a + 1)]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2a + 1)x + a(a + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = a + 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 6[2x - (2a + 1)]$$

Suy ra $f'(a) = -6 < 0$ và $f'(a + 1) = 6 > 0$.

Do vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x_1 = a$ và đạt cực tiểu tại điểm $x_2 = a + 1$

Ta có $|x_1 - x_2| = 1$ không phụ thuộc vào giá trị của a .

Câu 2.

1. Xét phương trình $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^5 x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) + 4(1 - \cos^2 x)^2 = 8\cos^5 x$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^6 x - 4\cos^4 x + 6\cos^2 x - 3 = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = \cos^2 x$ ($0 \leq t \leq 1$). Phương trình (2) tương đương với phương trình

$$8t^3 - 4t^2 + 6t - 3 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(4t^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } 4t^2 + 3 > 0, \forall t)$$

$$\text{Ta được } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\bullet \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\pi}{4} + m2\pi$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \pm \frac{3\pi}{4} + m2\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \right) = 2$

Câu 3.

1. Ta có: $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x + 4} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 4} + 1 \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx + 1$

$$\text{Tính } \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx$$

$$\text{Ta có } \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x+1)^2 + (\sqrt{3})^2} dx$$

$$\text{Đặt } x + 1 = \sqrt{3} \tan t \text{ với } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right). \text{ Suy ra } dx = \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Khi } x = -1 \text{ thì } t = 0 \text{ và } x = 0 \text{ thì } t = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Ta được } \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^0 \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} + 1.$$

2. Gọi $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2) \in (P)$. Ta có:

$$y_1 = x_1^2 + 4x_1 - 6 \quad (1), \quad y_2 = x_2^2 + 4x_2 - 6 \quad (2)$$

Vì gốc tọa độ O là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{-3 + x_1 + x_2}{3} = 0 \\ \frac{-9 + y_1 + y_2}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 - x_1 \\ y_2 = 9 - y_1 \end{cases}$$

Thế x_2 và y_2 vào (2): $9 - y_1 = (3 - x_1)^2 + 4(3 - x_1) - 6 \Leftrightarrow -y_1 = x_1^2 - 10x_1 + 6$

ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 + 4x_1 - 6 \\ -y_1 = x_1^2 - 10x_1 + 6 \end{cases}$$

Giải được $x = 3$, $y = 15$ hoặc $x = 0$, $y = -6$

Vậy $B(3; 15)$ và $C(0; -6)$.

Câu 4. Giả thiết cho $P(3; 1; -1)$, $Q(2; -1; 4)$ và $(\alpha): 2x - y + 3z - 1 = 0$

1. Đường thẳng PQ đi qua điểm $P(3; 1; -1)$ và vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1; -2; 5)$ nên có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

Vì Δ là hình chiếu vuông góc của PQ trên mặt phẳng (Oyz) , nên ta dễ dàng suy ra được phương trình của Δ là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

2. Gọi (β) là mặt phẳng qua hai điểm P , Q và vuông góc với (α) .

Ta có $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 3)$, $\overrightarrow{PQ} = (-1; -2; 5)$.

Suy ra, một vectơ pháp tuyến của (β) là $\vec{n}_\beta = (1; -13; -5)$.

Phương trình của mp (β) là:

$$1(x - 3) - 13(z - 1) - 5(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 13y - 5z + 5 = 0$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $5^{2(x - \log_5 2)} - 2 = 5^{x - \log_5 2}$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$4 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^{2x} - 2^x - 1 = 0$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), ta được phương trình

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Như vậy $t = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Kết luận, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

2. a) Từ giả thiết: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{AJC} = 90^\circ$ (1)

Cũng từ giả thiết:

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB),$

do đó $BC \perp AI$

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp SB \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC), \text{ suy ra } AI \perp IC \text{ hay } \widehat{AIC} = 90^\circ \quad (2)$$

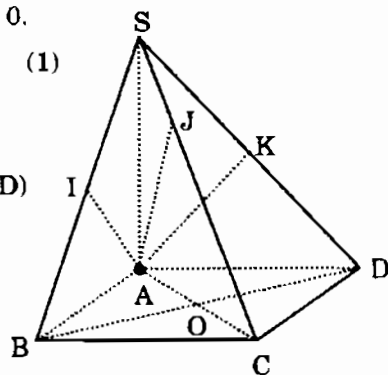
Tương tự: $\widehat{AKC} = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra bảy điểm A, B, C, D, I, J, K cùng nằm trên một mặt cầu (π) đường kính AC.

Bán kính của (π) là $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Diện tích của mặt cầu (π): $S_{(\pi)} = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2.$

b) Điểm M nằm trên đường tròn (T) có đường kính là AC, nên M nằm trên mặt cầu (π). Để ý rằng BD cũng là đường kính của (π), nên với điểm $M \in (\pi)$ ta phải có $\widehat{BMD} = 90^\circ$. Vậy tam giác MBD vuông tại M.



ĐỀ 29

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
3. Tìm điều kiện đối với a và b sao cho đường thẳng (D) có phương trình $y = ax + b$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C với B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Câu 2.

1. Giải phương trình $2\cos^2 4x + \sin 10x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$
2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2 \cdot \sin 2x} - e^2}{x}$

Câu 3.

1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng
- Δ
- có phương trình
- $x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 4 = 0$
- (
- α
- là một tham số).

Chứng minh rằng Δ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định. Viết phương trình của đường tròn đó.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (α):

$$2x - y + 3z + 4 = 0 \text{ và điểm } M_0(2; -1; 2)$$

- Viết phương trình mặt phẳng (β) qua M_0 song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng (α).
- Viết phương trình của mặt phẳng (P) đối xứng với (α) qua điểm M_0 .

Câu 5.

- Giải phương trình $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^x = 84$
- Cho tứ diện ABCD. Tìm tập hợp các điểm M của không gian sao cho:
 - $(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MC} + \vec{MD}) = 0$
 - $\vec{MA} \cdot (\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) = 0$

Giải**Câu 1.**

1. Khảo sát hàm số
- $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
-
- (độc giả tự giải)

2. Đồ thị cắt trục tung tại điểm I(0; 1).

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow f'(0) = -9$

Suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) tại I(0; 1) là $y = -9x + 1$.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D):

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = ax + b \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - (a+9)x + 1 - b = 0 \quad (1)$$

Theo yêu cầu của bài toán, ta sẽ tìm điều kiện đối với a và b để đồ thị của hàm số

$$y = g(x) = x^3 - 3x^2 - (a+9)x + 1 - b$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $M_1(x_1; 0)$, $M_2(x_2; 0)$, $M_3(x_3; 0)$ với $x_1 < x_2 < x_3$ và $2x_2 = x_1 + x_3$.

Theo đề 11 - câu 1, ta đã chứng minh được x_2 là nghiệm của phương trình $g''(x) = 0$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 6x - (a+9)$, $g''(x) = 6(x-1)$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Suy ra } x_2 = 1.$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = g(x_2) = g(1) = -10 - a - b$$

Mà $y_2 = 0$ nên $-10 - a - b = 0 \Leftrightarrow a + b = -10$. Suy ra $a = -10 - b$.

Thế $a = -10 - b$ vào phương trình (1) ta được phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + (b+1)x + 1 - b = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 1 + b) = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ h(x) = x^2 - 2x - 1 + b = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác 1, nghĩa là:

$$\begin{cases} \Delta' = 2 - b > 0 \\ h(1) = -2 + b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 2 \\ b \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow b < 2$$

Vậy điều kiện đối với a và b là $a + b = -10$ và $b < 2$. Khi đó phương trình của (D) trở thành

$$y = ax - a - 10 \Leftrightarrow y = a(x - 1) - 10.$$

Như vậy đường thẳng (D) luôn đi qua điểm cố định $(1; -10)$.

Câu 2.

1. Xét phương trình $2\cos^2 4x + \sin 10x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (1 + \cos 8x) + \sin 10x = 1 + \cos x \Leftrightarrow \cos 8x + \sin 10x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 9x \cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x(2\cos 9x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos 9x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\bullet 2\cos 9x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 9x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 9x = \pm \frac{\pi}{3} + m2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{27} + m\frac{2\pi}{9}$$

Vậy phương trình đã cho có ba họ nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{27} + m\frac{2\pi}{9} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2+\sin 2x} - e^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \right) = 2e^2$

Câu 3.

1. a) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow t^2 = 1-x^2$. Suy ra $x dx = -t dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$ và khi $x = 1$ thì $t = 0$

$$\begin{aligned} \text{Ta được } \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_1^0 x^2 \sqrt{1-x^2} x dx = \int_1^0 (1-t^2) \cdot t \cdot (-t) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - t^4) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

b) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

Đặt $x = \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $dx = \cos t dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

2. $\Delta: x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha - 4 = 0$

Phương trình của Δ viết lại:

$$x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 3 = 0$$

Giả sử Δ tiếp xúc với đường tròn cố định (C) có tâm $I(a, b)$ và bán kính R .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } d(I, \Delta) = R &\Leftrightarrow \frac{|a \cos 2\alpha + b \sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 3|}{\sqrt{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}} = R \\ &\Leftrightarrow |(a+1) \cos 2\alpha + b \sin 2\alpha - 3| = R. \end{aligned}$$

R không phụ thuộc vào α khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

Suy ra $I(-1; 0)$ và $R = 3$.

Vậy Δ luôn tiếp xúc với đường tròn (C) cố định tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = 3$

Phương trình của đường tròn này là:

$$(x+1)^2 + y^2 = 9.$$

Câu 4.

Giả thiết cho $(\alpha): 2x - y - 3z + 4 = 0, M_0(2; -1; 2)$

1. Mặt phẳng (β) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 3)$ và $\vec{j} = (0; 1; 0)$

Do đó vectơ pháp tuyến của (β) là: $\vec{n}_\beta = (\vec{n}_\alpha; \vec{j}) = (-3; 0; 2)$

Phương trình của mặt phẳng (β) :

$$-3(x-2) + 0(y+1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2z + 2 = 0$$

2. Điều kiện để mặt phẳng (P) đối xứng với mặt phẳng (α) qua điểm M_0 là:

$(P) \parallel (\alpha)$ và $d(M_0, (\alpha)) = d(M_0, (P))$.

* $(P) \parallel (\alpha)$ nên phương trình của (P) có dạng $2x - y + 3z + m = 0$ ($m \neq 2$)

$$* d(M_0, (\alpha)) = d(M_0, (P)) \Leftrightarrow \frac{15}{\sqrt{14}} = \frac{|11+m|}{\sqrt{14}}$$

$$\Leftrightarrow |m+11| = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \text{ (loại)} \\ m=-26 \end{cases}$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là $2x - y + 3z - 26 = 0$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} = 84$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$3(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^x - 252 = 0$$

Đặt $t = (\sqrt[10]{3})^x$ ($t > 0$), phương trình trở thành

$$3t^2 + t - 252 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = -\frac{28}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Ta được $t = 9 \Leftrightarrow (\sqrt[10]{3})^x = 9 \Leftrightarrow x = 20$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 20$.

2. a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, ta có:

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 2\overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$$

Suy ra tập hợp các điểm M là mặt cầu đường kính IJ.

b) Gọi G là trọng tâm của $\triangle BCD$, ta có:

$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MG}.$$

Suy ra tập hợp các điểm M là mặt cầu đường kính AG.

ĐỀ 30

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - (m-1)x^2 + (m-2)x$.

- Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$.
- Giả sử đường thẳng (D): $y = a$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Hãy tính tổng $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Câu 2.

1. Giải phương trình $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$.

2. Tìm tập xác định của hàm số sau:

$$y = \ln(\sqrt{x^2 + x - 2} - x).$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx$.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho một hình vuông có một đỉnh là $A(-1; 1)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $2x + y - 4 = 0$. Lập phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng có phương trình như sau:

$$(\alpha): x + 2y - z + 2 = 0; (\beta): x - my + (m + 1)z + m - 2 = 0.$$

1. Tìm giá trị của m để hai mặt phẳng (α) và (β) hợp với nhau một góc 60° .
2. Cho $m = 1$, hãy tìm phương trình giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) .

Câu 5.

1. Giải phương trình $27. x^{\log_3 x} = x^{\frac{10}{3}}$.
2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a . Tìm tập hợp các điểm M của không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$ với k là một hằng số dương.

Giải**Câu 1.**

1. Xét hàm số $y = f(x) = 2x^3 - (m - 1)x^2 + (m - 2)x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 6x^2 - 2(m - 1)x + m - 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$$

$$\Delta' = m^2 - 8m + 13$$

Điều kiện để hàm số đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ là:

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 6x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 8m + 13 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{3} \leq m \leq 4 + \sqrt{3}$$

Vậy $4 - \sqrt{3} \leq m \leq 4 + \sqrt{3}$.

2. Khi $m = 2$ phương trình của hàm số trở thành $y = 2x^3 - x^2$.

(độc giả tự giải)

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D):

$$2x^3 - x^2 = a \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{a}{2} = 0 (*)$$

Như vậy x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình (*)

$$\text{Do đó } x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{a}{2} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Từ đó suy ra $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$ và $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$

$$\text{Vậy } S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{1}{4}.$$

Câu 2.

1. Xét phương trình $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x (2 \sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos 2x - \cos 4x) - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cos 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ hoặc } \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ 4x = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm:

$$x = k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{4} \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

2. Xét hàm số $y = \ln(\sqrt{x^2 + x - 2} - x)$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} - x > 0 \end{cases}$$

$$\bullet x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 1.$$

$$\bullet \text{Ta xét bất phương trình } \sqrt{x^2 + x - 2} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 2} > x \quad (*)$$

+ Nếu $x \leq -2$ thì hiển nhiên (*) được nghiệm đúng.

+ Nếu $x \geq 1$ thì từ (*) ta được:

$$x^2 + x - 2 > x^2 \Leftrightarrow x > 2$$

Vậy tập các định nghĩa của hàm số là $D = (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.

Câu 3.

1. Tính $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx$

$$\text{Đặt } x^4 = \tan t \text{ với } t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \text{ Suy ra } x^3 dx = \frac{1}{4}(1 + \tan^2 t) dt$$

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } t = 0 \text{ và khi } x = 1 \text{ thì } t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ta được } \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{1+(x^4)^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{16}.$$

2. Gọi Δ là đường thẳng $2x + y - 4 = 0$. Rõ ràng điểm $A(-1; 1) \notin \Delta$.

Gọi hình vuông là ABCD, với $B, D \in \Delta$. Khoảng cách từ A đến tâm của hình vuông là:

$$h = d(A, \Delta) = \frac{|2(-1) + 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra độ dài cạnh của hình vuông là: } a = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}.$$

Do đó, hai điểm B và D nằm trên đường tròn (T) tâm A bán kính $R = \sqrt{10}$ có phương trình là:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 10.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (T):

$$(x+1)^2 + (-2x+3)^2 = 10 \Leftrightarrow 5x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Suy ra B(0; 4); D(2; 0).

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB: $3x - y + 4 = 0$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AD: $x + 3y - 2 = 0$

Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua B(0; 4) và song song với AD nên có phương trình $x + 3y - 12 = 0$.

Đường thẳng chứa cạnh CD đi qua D(2; 0) và song song với AB nên có phương trình $3x - y - 6 = 0$.

Câu 4. (α): $x + 2y - z + 2 = 0$; (β): $x - my + (m+1)z + m - 2 = 0$.

1. Nếu (α) và (β) hợp với nhau một góc 60° thì ta có:

$$\cos 60^\circ = \frac{|1 \cdot 1 + 2(-m) + (-1) \cdot (m+1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-m)^2 + (m+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3m|}{\sqrt{6} \sqrt{m^2 + 2m + 2}} \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy nếu $m = 1$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ thì (α) và (β) hợp với nhau một góc 60° .

2. Khi $m = 1$, phương trình của (β) là $x - y + 2z - 1 = 0$.

Gọi Δ là giao tuyến của (α) và (β), các điểm nằm trên Δ có tọa độ nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Cho $z = t$. Giải hệ ta được $x = -t$; $y = t - 1$.

Phương trình của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $27 \cdot x^{\log_{27} x} = x^{\frac{10}{3}}$.

Điều kiện: $x > 0$

Lấy lôgarit theo cơ số 27 hai vế, ta được:

$$1 + \log_{27} x \cdot \log_{27} x = \frac{10}{3} \log_{27} x \Leftrightarrow 3(\log_{27} x)^2 - 10 \log_{27} x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{27} x = 3 \\ \log_{27} x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27^3 \\ x = 27^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 19683 \\ x = 3 \end{cases}$$

2. Gọi G là trọng tâm của tứ diện đều ABCD. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} \Rightarrow MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} \quad (1)$$

Tương tự: $MB^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GB}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GB}$ (2)

$$MC^2 = \overline{MC}^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GC}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GC}$$
 (3)

$$MD^2 = \overline{MD}^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GD}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GD}$$
 (4).

Cộng (1), (2), (3), (4) và để ý rằng $GA^2 = \overline{GA}^2 = \overline{GB}^2 = \overline{GC}^2 = \overline{GD}^2$, ta được:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \\ = 4MG^2 + 4GA^2 + \overline{MG} \cdot (\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + 4GA^2,$$

$$\text{vì } \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \vec{0}$$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, trọng tâm G của tứ diện ABCD là trung điểm của IJ.

Do ABCD là tứ diện đều, nên ta dễ chứng minh được IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

Từ tam giác AIJ vuông tại I:

$$IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Từ tam giác AIG vuông tại I:

$$GA^2 = AI^2 + GI^2 = AI^2 + \frac{IJ^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$$

$$\text{Suy ra } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + \frac{3a^2}{2}$$

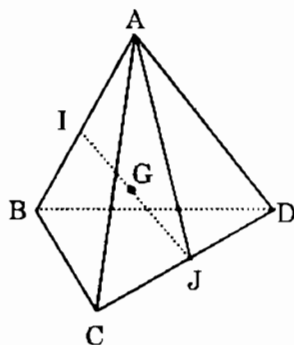
Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$ khi và chỉ khi:

$$4MG^2 + \frac{3a^2}{2} = k^2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{2k^2 - 3a^2}{8}$$

• Nếu $k^2 < \frac{3a^2}{2}$ thì $MG^2 < 0$, tập hợp các điểm M là $\emptyset$.

• Nếu $k^2 = \frac{3a^2}{2}$ thì $MG = 0$, tập hợp các điểm M là {G}.

• Nếu $k^2 > \frac{3a^2}{2}$ thì $MG = \frac{\sqrt{2(2k^2 - 3a^2)}}{4}$, tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G với bán kính $R = \frac{\sqrt{2(2k^2 - 3a^2)}}{4}$.



ĐỀ 31

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số khi $m = 1$.
2. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$.
2. Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + 8} \right).$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_1^e \frac{\ln x \sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $B(5; 0)$. Điểm A nằm trên góc phần tư thứ nhất sao cho tam giác OAB vuông tại A và đường tròn nội tiếp có bán kính $r = 1$. Tìm tọa độ của đỉnh A.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình lần lượt là:

$$2x + ny + 2z + 3 = 0 \text{ và } mx + 2y - 4z + 6 = 0$$

1. Xác định giá trị của m và n để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.
2. Với các giá trị m và n vừa tìm được, hãy viết phương trình của mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) , (β) biết tâm của nó nằm trên đường thẳng

$$\Delta \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Câu 5.

1. Giải phương trình $3 \cdot 2^{4 \ln x + 2} - 25 \cdot 10^{\ln x} + 4 \cdot 3^{\ln x^2 + 1} = 0$.
2. Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G
 - a) Tìm tập hợp tất cả các điểm M trong không gian sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD}| = k$ (với k là một hằng số dương).
 - b) Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Đặt $AA' = m_a$; $BB' = m_b$; $CC' = m_c$ và R là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Chứng tỏ rằng $m_a + m_b + m_c + m_d \leq \frac{16R}{3}$.

Giải

Câu 1.

1. Khi $m = 1$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

(độc giả tự giải).

2. Hàm số đã cho có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$

Nếu $m \neq 0$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$, $x_2 = 2m$.

Nếu $m > 0$ thì (C_m) có điểm cực đại $(0; 4m^3)$ và điểm cực tiểu $(2m; 0)$.

Nếu $m < 0$ thì (C_m) có điểm cực đại $(2m; 0)$ và điểm cực tiểu $(0; 4m^3)$.

Cả hai trường hợp, để tìm cực đại và cực tiểu của (C_m) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$, ta phải có:

$$4m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 2.

1. Xét phương trình $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$ (1)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với điều kiện đó ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Leftrightarrow \sin 3x (\cos 3x - \cos x \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 & (2) \\ \cos 3x = \cos x \cos 2x & (3) \end{cases}$$

$$\bullet \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = m\pi \Leftrightarrow x = m\frac{\pi}{3} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet (3) \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos x) \Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow 3x = \pm x + n2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = n\pi \text{ hoặc } x = n\frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = m\frac{\pi}{3} \quad (m \in \mathbb{Z})$.

$$2. y = \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + 8} \right)$$

$$\text{Điều kiện } \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + 8} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$$

Với điều kiện đó ta có $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + 8} > 0$ nên:

$$y = \ln \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + 8} \right) \Leftrightarrow y = \ln \left| \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + 8} \right|$$

$$\Leftrightarrow y = \ln |x^2 + x - 2| - \ln |x^2 - 6x + 8|$$

$$\text{Do đó } y' = \frac{2x+1}{x^2+x-2} - \frac{2x-6}{x^2-6x+8} = \frac{-7x^2+20x-4}{(x^2+x-2)(x^2-6x+8)}.$$

Câu 3.

1. Tính $\int_1^e \frac{\ln x \cdot \sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$

Đặt $t = \sqrt{1 + \ln x}$. Suy ra $t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}$

Khi $x = 1$ thì $t = 1$ và khi $x = e$ thì $t = \sqrt{2}$

Ta được $\int_1^e \frac{\ln x \cdot \sqrt{1 + \ln x}}{x} dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)t \cdot 2t dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{15} (\sqrt{2} + 1).$

2. Từ giả thiết suy ra, tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác OAB cũng nằm trên góc phần tư thứ nhất, do đó tọa độ của I có dạng $I(a; 1)$ với $a > 0$.

Phương trình của đường thẳng OA có dạng $y = kx \Leftrightarrow kx - y = 0$ với $k > 0$.

Đường thẳng AB đi qua B(5; 0) và vuông góc với OA nên có phương trình $x + ky - 5 = 0$.

Phương trình các phân giác của góc A trong tam giác OAB:

$$\frac{kx - y}{\sqrt{k^2 + 1}} = \pm \frac{x + ky - 5}{\sqrt{k^2 + 1}} \Leftrightarrow \begin{cases} (k - 1)x - (1 + k)y + 5 = 0 \\ (k + 1)x + (k - 1)y - 5 = 0 \end{cases}$$

Gọi $\Delta: (k + 1)x + (k - 1)y - 5 = 0$

Bằng cách thế tọa độ của gốc tọa độ O và điểm B(5; 0) vào vế trái phương trình của Δ , ta thấy hai điểm O và B nằm hai bên đường thẳng Δ , do đó Δ là phân giác trong kẻ từ A của tam giác OAB.

Điểm $I(a; 1) \in \Delta$ suy ra $a = \frac{6 - k}{k + 1} \Rightarrow I\left(\frac{6 - k}{k + 1}; 0\right).$

Ta phải có điều kiện:

$$d(I, OA) = 1 \Leftrightarrow \frac{\left| k \cdot \frac{6 - k}{k + 1} - 1 \right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |-k^2 + 5k - 1| = |k + 1| \sqrt{k^2 + 1} \quad (*)$$

Bình phương hai vế của (*) và thu gọn, ta được:

$$12k^2 - 25k + 12 = 0$$

Phương trình trên có hai nghiệm: $k_1 = \frac{4}{3}; k_2 = \frac{3}{4}.$

• Khi $k = \frac{4}{3}$: Các đường thẳng OA và AB có phương trình lần lượt là

$$4x - 3y = 0 \text{ và } 3x + 4y - 15 = 0.$$

Tọa độ của A nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right).$$

• Khi $k = \frac{3}{4}$: Các đường thẳng OA và AB có phương trình lần lượt là

$$3x - 4y = 0 \text{ và } 4x + 3y - 20 = 0.$$

Tọa độ của A nghiệm đúng hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 4x + 3y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{16}{5}; \frac{12}{5}\right)$$

Vậy $A\left(\frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right)$ hoặc $A\left(\frac{16}{5}; \frac{12}{5}\right)$.

Câu 4. (α): $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và (β): $mx + 2y - 4z + 6 = 0$

1. Điều kiện để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau là:

$$\frac{2}{m} = \frac{n}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = -1 \end{cases}$$

Vậy khi $m = -4$ và $n = -1$ thì hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

2. Khi $m = -4$ và $n = -1$ ta được:

$$(\alpha): 2x - y + 2z + 3 = 0 \text{ và } (\beta): 2x - y + 2z - 3 = 0$$

Gọi I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S), $I \in \Delta$ nên $I(2 + t; 1 - t; 2 + 2t)$.

Ta có $d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta)) = R$.

$$\Leftrightarrow \frac{|2(2+t) - (1-t) + 2(2+2t) + 3|}{3} = \frac{|2(2+t) - (1-t) + 2(2+2t) - 3|}{3}$$

$$\Leftrightarrow |7t + 10| = |7t + 4| \Leftrightarrow 14t + 14 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Suy ra $I(1; 2; 0)$ và $R = 1$.

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1.$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $3 \cdot 2^{4\ln x + 2} - 25 \cdot 12^{\ln x} + 4 \cdot 3^{\ln x^2 + 1} = 0$.

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$14 \cdot 2^{2\ln x} - 25 \cdot 4^{\ln x} \cdot 3^{\ln x} + 12 \cdot 3^{2\ln x} = 0 \Leftrightarrow 12 \left(\frac{4}{3}\right)^{2\ln x} - 25 \left(\frac{4}{3}\right)^{\ln x} + 12 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^{\ln x}$ ($t > 0$), phương trình trở thành:

$$12t^2 - 25t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \text{ hoặc } t = \frac{3}{4}$$

$$\bullet t = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{\ln x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\bullet t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{\ln x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = e, x = \frac{1}{e}$.

2. a) Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên với M là một điểm bất kì trong không gian, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{MG}| = k$$

$$\Leftrightarrow 4MG = k \Leftrightarrow MG = \frac{k}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G bán kính $R = \frac{k}{4}$.

b) Gọi O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$$\text{Ta có } OA^2 = (\overrightarrow{OA})^2 = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GO})^2$$

$$OA^2 = (\overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{GO})^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GO} = GA^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GO}$$

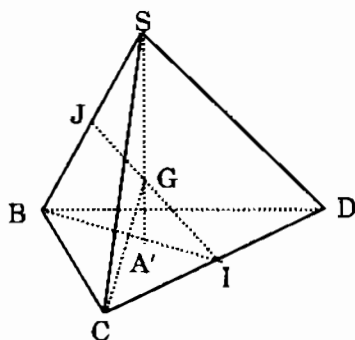
$$\text{Mà } GA = \frac{3}{4}AA' = \frac{3}{4}m_a$$

$$\text{Do đó } OA^2 = \frac{9}{16}m_a^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GO}.$$

$$\text{Tương tự: } OB^2 = \frac{9}{16}m_b^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GO}.$$

$$OC^2 = \frac{9}{16}m_c^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GO}.$$

$$OD^2 = \frac{9}{16}m_d^2 + GO^2 - 2\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GO}.$$



Cộng vế ta được:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \frac{9}{16}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) + 4GO^2$$

(để ý rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$)

$$\text{Hay } 4R^2 = \frac{9}{16}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) + 4GO^2 \quad (OA = OB = OC = OD = R)$$

$$\text{Vậy } 4R^2 \geq \frac{9}{16}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $GO = 0 \Leftrightarrow G \equiv O$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$(m_a + m_b + m_c + m_d)^2 \leq 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$$

$$\text{Hay } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \geq \frac{1}{4}(m_a + m_b + m_c + m_d)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2): } 4R^2 \geq \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4}(m_a + m_b + m_c + m_d)^2$$

$$\text{Do đó } 2R \geq \frac{3}{8}(m_a + m_b + m_c + m_d) \Leftrightarrow m_a + m_b + m_c + m_d \leq \frac{16R}{3}$$

$$\text{Vậy } m_a + m_b + m_c + m_d \leq \frac{16R}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$(G \equiv O \text{ và } m_a = m_b = m_c = m_d) \Leftrightarrow ABCD \text{ là một tứ diện đều.}$$

ĐỀ 32

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
2. Tìm giao điểm của (C) và parabol (P) có phương trình $y = g(x) = x^2 + 1$.
Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P).
3. Tìm các khoảng trên đó (C) nằm phía trên hoặc phía dưới (P).

Câu 2.

1. Cho phương trình $2m\cos^2 x + (m+1)\sin 2x = 3m - 1$ (m là một tham số)
 - a) Xác định m để phương trình có nghiệm.
 - b) Giải phương trình khi $m = 3$.
2. Với a, b, c là ba số thực bất kì, chứng minh rằng phương trình sau đây luôn có ít nhất hai nghiệm số phân biệt:

$$x^8 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0.$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với A(1; 4) và các trung tuyến BM, CN nằm trên các đường thẳng có phương trình lần lượt là $x - 9y + 3 = 0$; $x + 3y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y + 2z - 10 = 0$.

1. Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm I(-2; 1; 3) sao cho mặt phẳng (P) chắn mặt cầu (S) theo một đường tròn (T) có độ dài bằng 8π .
2. Viết phương trình của đường thẳng là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy).

Câu 5.

- Giải phương trình $4^{2\sin^2 x} + 4^{1+\cos 2x} - 17 = 0$.
- Cho hình chóp tam giác S.ABC có các cạnh SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 2a$; $SB = 2a$; $SC = 4a$.
 - Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.
 - Tính diện tích của mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABC.

Giải**Câu 1.**

- Khảo sát hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
(độc giả tự giải)
- * Tọa độ giao điểm của (C) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

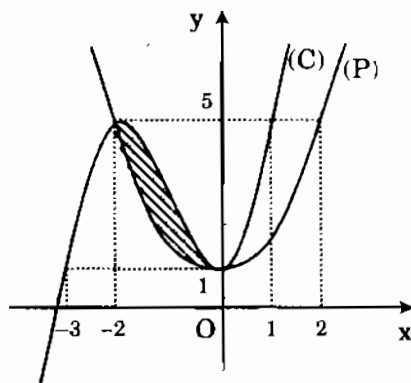
$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 1 = x^2 + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ và } y = 1 \\ x = -2 \text{ và } y = 5 \end{cases}$$

Vậy (C) và (P) cắt nhau tại hai điểm A(0; 1) và B(-2; 5).

* Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P):

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 ((x^3 + 3x^2 + 1) - (x^2 + 1)) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 + 2x^2) dx \\ S &= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{4}{3} \text{ (dvdt)}. \end{aligned}$$



- (C) nằm phía trên (P) khi và chỉ khi:

$$x^3 + 3x^2 + 1 > x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

- (C) nằm dưới trên (P) khi và chỉ khi:

$$x^3 + 3x^2 + 1 < x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -2.$$

Vậy trên khoảng $(-2; +\infty)$ thì (C) nằm phía trên (P) và trên khoảng $(-\infty; -2)$ thì (C) nằm phía dưới (P).

Câu 2.

- a) Xét phương trình $2m\cos^2 x + (m+1)\sin 2x = 3m - 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow m(\cos 2x + 1) + (m+1)\sin 2x = 3m - 1$$

$$\Leftrightarrow m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = 2m - 1 \quad (2)$$

Suy ra $a = m$; $b = m + 1$; $c = 2m - 1$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \geq (2m-1)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m^2 + 2m + 1 \geq 4m^2 - 4m + 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3.$$

b) Khi $m = 3$ ta được phương trình $3\cos 2x + 4\sin 2x = 5$ (2)

Chia hai vế của phương trình (2) cho $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, phương trình (2) trở thành:

$$\frac{3}{5} \cos 2x + \frac{4}{5} \sin 2x = 1 \quad (3)$$

Đặt $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \cos \alpha \cos 2x + \sin \alpha \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \cos(2x - \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - \alpha = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\pi$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm là $x = \frac{\alpha}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. Xét hàm số $f(x) = x^8 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$

Hiển nhiên $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -1 < 0$.

Mặt khác:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^8 \left(1 + \frac{a}{x^5} + \frac{b}{x^6} + \frac{c}{x^7} - \frac{1}{x^8} \right) = +\infty$$

Do đó tồn tại số $\alpha > 0$ (α đủ lớn) sao cho $f(\alpha) > 0$. Suy ra $f(0).f(\alpha) < 0$

Như thế tồn tại số $x_1 \in (0; \alpha)$ sao cho $f(x_1) = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^8 \left(1 + \frac{a}{x^5} + \frac{b}{x^6} + \frac{c}{x^7} - \frac{1}{x^8} \right) = +\infty$$

Do đó tồn tại số $\beta < 0$ ($|\beta|$ đủ lớn) sao cho $f(\beta) > 0$. Suy ra $f(0).f(\beta) < 0$

Như thế tồn tại số $x_2 \in (\beta; 0)$ sao cho $f(x_2) = 0$

Nhận thấy x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = 0$

Vậy phương trình đã cho có ít nhất hai nghiệm số.

Câu 3.

1. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

Đặt $\sin x = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\cos x dx = (1 + \tan^2 t) dt$

Khi $x = 0$ thì $t = 0$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Ta được } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t) dt}{1 + \tan^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

2. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 9y + 3 = 0 \\ x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow G(6; 1)$$

Gọi $B(x_1; y_1); C(x_2; y_2)$. Ta có:

$$\begin{cases} \frac{1+x_1+x_2}{3} = 6 \\ \frac{4+y_1+y_2}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 17-x_1 \\ y_2 = -1-y_1 \end{cases} \Rightarrow C(17-x_1; -1-y_1).$$

Do $B \in BM$ và $C \in CN$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - 9y_1 + 3 = 0 \\ (17-x_1) + 3(-1-y_1) - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 9y_1 + 3 = 0 \\ x_1 + 3y_1 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $B\left(3; \frac{2}{3}\right)$ và $C\left(14; -\frac{5}{3}\right)$.

Câu 4.

1. Gọi r là bán kính của (T) thì có: $2\pi r = 8\pi \Leftrightarrow r = 4$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P): $d = \frac{|2(-2) - 1 + 2 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3$.

Bán kính của mặt cầu: $R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Phương trình của mặt cầu cần tìm là:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

2. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Oxy).

Vectơ pháp tuyến của (P) và (Oxy) lần lượt là $\vec{n}_p = (2; -1; 2); \vec{k} = (0; 0; 1)$.

Vectơ chỉ phương của Δ : $\vec{u} = [\vec{k}; \vec{n}_p] = (1; 2; 0)$.

Các điểm thuộc Δ có tọa độ nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 10 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow I(5; 0; 0) \in \Delta$$

Phương trình của đường thẳng Δ :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 5.

1. Xét phương trình: $4^{2\sin^2 x} + 4^{1+\cos 2x} - 17 = 0$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$4^{1-\cos 2x} + 4^{1+\cos 2x} - 17 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{4^{\cos 2x}} + 4 \cdot 4^{\cos 2x} - 17 = 0$$

Đặt $t = 4^{\cos 2x}$ ($t > 0$), phương trình trở thành:

$$\frac{4}{t} + 4t - 17 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 17t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ hoặc } t = \frac{1}{4}.$$

• $t = 4 \Leftrightarrow 4^{\cos 2x} = 4 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi$.

$$\bullet t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^{\cos 2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + m2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

Vậy đáp số là: $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ($k, m \in \mathbb{Z}$).

2. a) Tam giác SAB vuông tại S nên trung điểm I của AB là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB .

Từ giả thiết ta suy ra $SC \perp (SAB)$. Do đó nếu qua I dựng đường thẳng Δ vuông góc với mp(SAB) thì Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔSAB . Qua trung điểm J của SC ta dựng mặt trung trực của SC, mặt phẳng này cắt Δ tại O. Điểm O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Ta có:

$$SI = \frac{AB}{2} = a\sqrt{2}; IO = SJ = 2a$$

Từ tam giác SIO vuông cân tại I:

$$SO = \sqrt{SI^2 + IO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (2a)^2} = a\sqrt{6}$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là $R = a\sqrt{6}$.

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

$$S_{m/c} = 4\pi R^2 = 4\pi (a\sqrt{6})^2 = 24\pi a^2.$$

- b) Gọi r là bán kính của mặt cầu (π) nội tiếp hình chóp S.ABC. Thể tích V của khối chóp S.ABC cho bởi:

$$V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}}$$

$$\bullet V = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 4a = \frac{8}{3} a^3.$$

$$\bullet S_{tp} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC}$$

$$S_{SAB} = 2a^2, S_{SBC} = 4a^2, S_{SCA} = 4a^2.$$

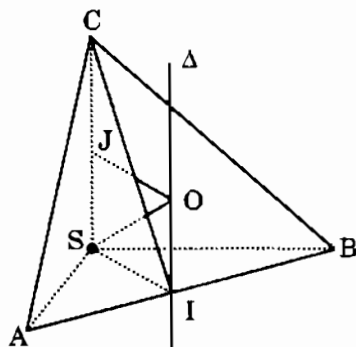
Tam giác SAB vuông cân tại S, nên $SI \perp AB$. Suy ra $CI \perp AB$

$$\text{Tam giác SCI vuông tại S} \Rightarrow CI = \sqrt{SI^2 + SC^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (4a)^2} = 3a\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CI = \frac{1}{2} 2a\sqrt{2} \cdot 3a\sqrt{2} = 6a^2.$$

$$\text{Suy ra } S_{tp} = 2a^2 + 4a^2 + 4a^2 + 6a^2 \Rightarrow r = \frac{\frac{8a^3}{3}}{16a^2} = \frac{a}{6}$$

$$\text{Diện tích của mặt cầu } (\pi) \text{ nội tiếp S.ABC: } S_{\pi} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{9}.$$



ĐỀ 33

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x + 3$.
2. Dựa vào đồ thị (C), hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình $8^x - 3 \cdot 2^x + m = 0$.
3. Chứng minh rằng, phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(\frac{33}{16}; \frac{17}{8}\right)$.

Câu 2.

1. Không dùng máy tính hãy chứng minh bất đẳng thức:

$$4\sin^2 63^\circ + \frac{15}{4\sin^2 63^\circ} < 8$$

2. Chứng minh rằng:

$$e^{2x} > 1 + 2x \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_{-1}^0 \frac{5x+4}{x^2+x-2} dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân ABCD với đáy lớn là AB, đáy nhỏ là CD ($AB > CD$), biết $A(1; 1)$; $B(5; 2)$ và $D(2; 3)$. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 2z + 10 = 0.$$

1. Tìm tâm và bán kính của đường tròn (T) là giao của (S) với mặt phẳng (Oxy).
2. Viết phương trình của mặt phẳng (P) khác với các mặt phẳng tọa độ sao cho (P) chứa trục Oz đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 5.

1. Giải phương trình $2^{2-\log_2 x} + 2^{\log_2 9x} = 4^{\log_2 3}$
2. Cho khối tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC).
 - a) Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$
 - b) Cho biết $OA = a$; $OB = 2a$; $OC = 3a$. Tính bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x + 3$.
(độc giả tự giải)

2. Xét phương trình $8^x - 3 \cdot 2^x + m = 0$ (1)

$$8^x - 3 \cdot 2^x + m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^3 - 3 \cdot 2^x + m = 0.$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), ta được phương trình $t^3 - 3t + m = 0$ (2)

Nhận thấy rằng: $t = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 t$ ($t > 0$). Nên giữa x và t có sự tương ứng một đối một. Do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.

Ta có (2) $\Leftrightarrow -t^3 + 3t + 3 = m + 3$

Do vậy số nghiệm của phương trình (2) (cũng là số nghiệm của phương trình đã cho) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -t^3 + 3t + 3$ ($t > 0$) và đường thẳng (D): $y = m + 3$.

Chú ý rằng, nếu gọi (C_1) là đồ thị của hàm số

$$y = -t^3 + 3t + 3 \quad (t > 0)$$

Thì (C_1) giống như đồ thị (C) trong miền $t > 0$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

- $m \leq 0$ (tức $m + 3 \leq 3$): phương trình có 1 nghiệm.
- $0 < m < 2$ (tức $3 < m + 3 < 5$): phương trình có 2 nghiệm.
- $m = 2$ (tức $m + 3 = 5$): phương trình có 1 nghiệm.
- $m > 2$ (tức $m + 3 > 5$): phương trình vô nghiệm:

3. Dựa vào đồ thị, đồ thị (C) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất, do vậy phương trình

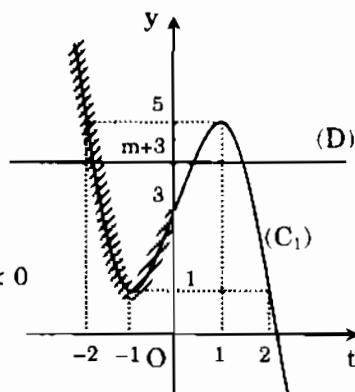
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 3 = 0$$

có một nghiệm duy nhất.

Mặt khác ta có $f\left(\frac{33}{16}\right) = \frac{1695}{4096} > 0$;

$$f\left(\frac{17}{8}\right) = -\frac{113}{512} < 0. \text{ Suy ra } f\left(\frac{33}{16}\right) \cdot f\left(\frac{17}{8}\right) < 0$$

Từ đó suy ra nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ thuộc khoảng $\left(\frac{33}{16}; \frac{17}{8}\right)$.



Câu 2.

1. Xét bất đẳng thức:

$$4\sin^2 63^\circ + \frac{15}{4\sin^2 63^\circ} < 8 \quad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 16\sin^4 63^\circ - 32\sin^2 63^\circ + 15 < 0$ (0)

Đặt $t = \sin^2 63^\circ$

Do $60^\circ < 63^\circ < 90^\circ \Rightarrow \frac{3}{4} < t < 1$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow 16t^2 - 32t + 15 < 0$$

Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 32t + 15$, $t \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(t) = 32t - 32; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	0	-1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$$\frac{3}{4} < t < 1 \Rightarrow -1 < f(t) < 0.$$

$$\text{Suy ra } f(t) = 16t^2 - 32t + 15 < 0, \forall t \in \left(\frac{3}{4}; 1\right)$$

Với $t = \sin^2 63^\circ \in \left(\frac{3}{4}; 1\right)$, ta được:

$$16\sin^4 63^\circ - 32\sin^2 63^\circ + 15 < 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 63^\circ + \frac{15}{4\sin^2 63^\circ} < 8 \text{ (đpcm).}$$

$$2. \text{ Ta có } e^{2x} > 1 + 2x \Leftrightarrow e^{2x} - 2x - 1 > 0$$

Xét hàm số $f(x) = e^{2x} - 2x - 1, x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2(e^{2x} - 1)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(t) = 4e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 4 > 0$$

suy ra hàm số có một cực tiểu duy nhất, đạt tại điểm $x_0 = 0$.

Do đó, với mọi $x \neq 0$ ta luôn có

$$f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^{2x} - 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 + 2x$$

Vậy $e^{2x} > 1 + 2x$ với mọi $x \neq 0$.

Câu 3.

$$1. \text{ Tính } \int_{-1}^0 \frac{5x+4}{x^2+x-2} dx$$

$$\text{Đặt } \frac{5x+4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad (*)$$

$$\text{Suy ra } 5x+4 \equiv A(x+2) + B(x-1) \Leftrightarrow 5x+4 \equiv (A+B)x + 2A-B$$

$$\text{Ta được: } \begin{cases} A+B=5 \\ 2A-B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\text{Thế vào } (*): \frac{5x+4}{x^2+x-2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+2}$$

$$\text{Do vậy: } \int_{-1}^0 \frac{5x+4}{x^2+x-2} dx = 3 \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx + 2 \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx$$

$$= 3\ln|x-1| \Big|_{-1}^0 + 2\ln|x+2| \Big|_{-1}^0 = -\ln 2.$$

2. Điểm C nằm trên đường thẳng Δ qua D song song với đường thẳng AB, Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4; 1)$.

Phương trình của Δ có dạng $x - 4y + m = 0$.

Do Δ qua D(2; 3) nên $2 - 4 \cdot 3 + m = 0 \Leftrightarrow m = 10$.

Suy ra $\Delta: x - 4y + 10 = 0$.

Vì ABCD là hình thang cân nên $BC = AD$. Do đó điểm C nằm trên đường tròn (T) với tâm B và có bán kính $R = AD = \sqrt{5}$.

Phương trình của đường tròn (T): $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Phương trình tung độ giao điểm của Δ và (T):

$$(4y - 15)^2 + (y - 2)^2 = 5 \Leftrightarrow 17y^2 - 124y + 224 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{56}{17} \end{cases}$$

• $y = 4 \Rightarrow x = 6$. Suy ra D(6; 4).

Trong trường hợp này: $CD = AB = \sqrt{17}$ (loại)

• $y = \frac{56}{17} \Rightarrow x = \frac{54}{17}$. Suy ra D $\left(\frac{54}{17}; \frac{56}{17}\right)$ (nhận)

Vậy D $\left(\frac{54}{17}; \frac{56}{17}\right)$.

Câu 4. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 2z + 10 = 0$.

1. Phương trình của mặt cầu (S) viết lại:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 16$$

Các điểm nằm trên đường tròn (T) có tọa độ nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 15 \\ z = 0 \end{cases}$$

Suy ra (T) có tâm J(3; 4; 0) và bán kính $r = \sqrt{15}$

2. Mặt cầu (S) có tâm I(3; 4; 1) và bán kính $R = 4$.

Do (P) chứa trục Oz nên phương trình có dạng $Ax + By = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} d(I, (P)) = R &\Leftrightarrow \frac{|3A + 4B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 4 \Leftrightarrow |3A + 4B| = 4\sqrt{A^2 + B^2} \\ &\Leftrightarrow (3A + 4B)^2 = 16(A^2 + B^2) \Leftrightarrow 7A^2 - 24AB = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ 7A - 24B = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

• $A = 0$: Ta được (P): $y = 0$ (loại, vì (P) $\equiv$ (Oxz))

• $7A - 24B = 0$: Có thể chọn $B = 7$, khi đó $A = 24$. Suy ra (P): $24x + 7y = 0$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $2^{2 \cdot \log_3 x} + 2^{\log_3 9x} = 4^{\log_2 3}$

Điều kiện: $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$4 \cdot 2^{2 \log_3 x} + 2^{2 \cdot \log_3 x} = (2^{\log_2 3})^2 \Leftrightarrow \frac{4}{2^{2 \log_3 x}} + 4 \cdot 2^{\log_3 x} = 9.$$

Đặt $t = 2^{\log_3 x}$ ($t > 0$), phương trình trở thành:

$$\frac{4}{t^2} + 4t - 9 = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 9t^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(4t^2 - t - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \\ t = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\bullet t = 2 \Leftrightarrow 2^{\log_3 x} = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\bullet t = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \Leftrightarrow 2^{\log_3 x} = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \Leftrightarrow \log_3 x = \log_2 \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \Leftrightarrow x = 3^{\log_2 \frac{1 + \sqrt{33}}{8}}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 3$; $x = 3^{\log_2 \frac{1 + \sqrt{33}}{8}}$.

2. a) Gọi I là giao điểm của đường thẳng CH và AB .

Ta có $OH \perp mp(ABC) \Rightarrow OH \perp AB$

$OC \perp mp(OAB) \Rightarrow OC \perp AB$

Suy ra $AB \perp mp(OCI) \Rightarrow AB \perp CI$ và $AB \perp OI$.

$$\text{Từ tam giác } OCI \text{ vuông tại } O: \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OC^2} \quad (1)$$

$$\text{Từ tam giác } OAB \text{ vuông tại } O: \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \quad (2)$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta được: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \quad (3)$$

b) Thể tích V của khối tứ diện $OABC$:

$$V = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} a \cdot 2a \cdot 3a = a^3.$$

$$\text{Từ (3): } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(3a)^2} = \frac{49}{36a^2} \Rightarrow OH = \frac{6a}{7}$$

OH chính là khoảng cách từ O đến $mp(ABC)$.

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot OH$$

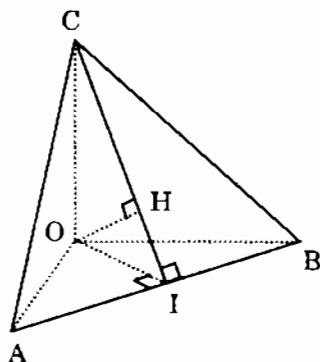
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{3V}{OH} = 3a^3 \frac{7}{6a} = \frac{7a^2}{2}$$

Diện tích toàn phần của tứ diện $OABC$:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC} \\ &= a^2 + 3a^2 + \frac{3a^2}{2} + \frac{7a^2}{2} = 9a^2. \end{aligned}$$

Bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{3a^3}{9a^2} = \frac{a}{3}.$$



ĐỀ 34

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - mx^2 - x + m$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 1$.
2. Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn đạt cực đại và cực tiểu.
3. Chứng minh rằng, khi m thay đổi đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A và B. Xác định m để các tiếp tuyến của (C_m) tại A và B vuông góc với nhau.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$
2. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta đều có:

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geq \sqrt{1 + x^2}.$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh AB, BC lần lượt là $4x + 3y - 4 = 0$; $x - y - 1 = 0$. Phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng $x + 2y - 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng

$$(P): x + 2y - 2z + 5 = 0; (Q): x + 2y - 2z - 13 = 0.$$

Viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua gốc tọa độ O, qua điểm A(5; 2; 1) và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

Câu 5.

1. Giải phương trình $(\sqrt{5} + 2)^{x^2+1} - (\sqrt{5} - 2)^{x^2-1} = \frac{4}{\sqrt{5}-2}$.
2. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên Ox, Oy, Oz lấy lần lượt các điểm A, B, C. Cho biết $\widehat{xOy} = \alpha$; $\widehat{yOz} = \beta$; $\widehat{zOx} = \gamma$; OA = a; OB = b; OC = c.
 - a) Tìm điều kiện để mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC có đường kính là BC.
 - b) Cho $a = b = c$ và $\alpha = \gamma = 60^\circ$. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giải

Câu 1.

1. Khi $m = 1$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 - x^2 - x + 1$
(độc giả tự giải)

2. Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - mx^2 - x + m$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^2 - 2mx - 1$

Để thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, nên ta suy ra hàm số luôn đạt cực đại và cực tiểu với mọi giá trị của m .

3. Phương trình của hàm số có thể viết

$$m(1 - x^2) = y - x^3 + x$$

Phương trình trên nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ y - x^3 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ và } y = 0 \\ x = -1 \text{ và } y = 0 \end{cases}$$

Vậy đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định $A(1; 0); B(-1; 0)$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2mx - 1$

Các tiếp tuyến của (C_m) tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$$k_1 = f'(1) = 2(1 - m); k_2 = f'(-1) = 2(1 + m)$$

Hai tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow 2(1 - m) \cdot 2(1 + m) = -1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Vậy nếu $m = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ thì các tiếp tuyến của (C_m) tại A và B vuông góc với nhau.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \cos^2 x + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + (\cos 4x + \cos 6x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos 5x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos x + \cos 5x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 5x = -\cos x \end{cases}$$

$$\bullet \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\bullet \cos 5x = -\cos x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow 5x = \pm(\pi - x) + m2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{m}{3}\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\pi$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + \frac{m}{3}\pi; x = -\frac{\pi}{4} + \frac{m}{2}\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

2. Ta có

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geq \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow 1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} \geq 0$$

Xét hàm số $f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+x^2 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Đạo hàm cấp hai: $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \Rightarrow f''(0) > 0$

Hàm số $f(x)$ có cực tiểu duy nhất, đạt tại điểm $x = 0$; $f(0) = 0$

Suy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta đều có:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \geq 0$$

Vậy $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Câu 3.

$$1. \text{ Ta có: } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\bullet \text{ Tính } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2}. \text{ Suy ra } dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\text{Ta được } \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{t} dt$$

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{3} \text{ thì } t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ và } x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t = 1.$$

$$\text{Ta được } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = -\ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

$$\bullet \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2.$$

$$\text{Vậy } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln 2.$$

2. Tọa độ của A nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 4)$$

Tọa độ của B nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0)$$

Đường thẳng AC đi qua điểm A(-2; 4) nên phương trình có dạng:

$$a(x + 2) + b(y - 4) = 0 \Leftrightarrow ax + by + 2a - 4b = 0$$

Gọi $\Delta_1: 4x + 3y - 4 = 0$; $\Delta_2: x + 2y - 6 = 0$; $\Delta_3: ax + by + 2a - 4b = 0$

Từ giả thiết suy ra $(\Delta_2, \Delta_3) = (\Delta_1, \Delta_2)$. Do đó:

$$\begin{aligned} \cos(\Delta_2, \Delta_3) &= \cos(\Delta_1, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|1.a + 2.b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4.1 + 2.3|}{\sqrt{25}\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow |a + 2b| &= 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a(3a - 4b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a - 4b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

• $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$. Do đó $\Delta_3: y - 4 = 0$.

• $3a - 4b = 0$: Có thể cho $a = 4$ thì $b = 3$. Suy ra $\Delta_3: 4x + 3y - 4 = 0$ (trùng với Δ_1)

Do vậy, phương trình của đường thẳng AC là $y - 4 = 0$.

Tọa độ của C nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(5; 4).$$

Câu 4. (P): $x + 2y - 2z + 5 = 0$; (Q): $x + 2y - 2z - 13 = 0$.

Gọi I(a; b; c) là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S). Từ giả thiết ta có:

$$OI = AI = d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \begin{cases} OI = AI \\ OI = d(I, (P)) \\ d(I, (P)) = d(I, (Q)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} * OI = AI &\Leftrightarrow OI^2 = AI^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a - 5)^2 + (b - 2)^2 + (c - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 10a + 4b + 2c = 30 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * OI = d(I, (P)) &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a + 2b - 2c + 5|}{3} \\ &\Leftrightarrow 9(a^2 + b^2 + c^2) = (a + 2b - 2c + 5)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * d(I, (P)) = d(I, (Q)) &\Leftrightarrow \frac{|a + 2b - 2c + 5|}{3} = \frac{|a + 2b - 2c - 13|}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 2c + 5 = a + 2b - 2c - 13 \text{ (loại)} \\ a + 2b - 2c + 5 = -a - 2b + 2c + 13 \end{cases} \Leftrightarrow a + 2b - 2c = 4 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (3) suy ra: } b = \frac{17}{3} - \frac{11a}{6}; c = \frac{11 - 4a}{3} \quad (4)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } a^2 + b^2 + c^2 = 9 \quad (5)$$

$$\text{Thế (4) vào (5) và thu gọn ta được: } (a - 2)(221a - 658) = 0$$

$$\text{Như vậy } a = 2 \text{ hoặc } a = \frac{658}{221}.$$

$$\text{Suy ra: } I(2; 2; 1) \text{ và } R = 3 \text{ hoặc } I\left(\frac{658}{221}; \frac{46}{221}; -\frac{67}{221}\right) \text{ và } R = 3.$$

Vậy có hai mặt cầu thỏa đề bài phương trình là:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9 \text{ và } \left(x - \frac{658}{221}\right)^2 + \left(y - \frac{46}{221}\right)^2 + \left(z + \frac{67}{221}\right)^2 = 9.$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $(\sqrt{5} + 2)^{x^2+1} - (\sqrt{5} - 2)^{x^2-1} = \frac{4}{\sqrt{5} - 2}$

Để ý rằng $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(\sqrt{5} + 2)^{x^2} - (\sqrt{5} - 2)^{x^2} = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{5} + 2)^{x^2} - \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^{x^2}} = 4.$$

Đặt $t = (\sqrt{5} + 2)^{x^2}$ ($t \geq 1$), phương trình trở thành:

$$t - \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{5} + 2 \\ t = 2 - \sqrt{5} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = \sqrt{5} - 2$, ta có:

$$(\sqrt{5} + 2)^{x^2} = \sqrt{5} + 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

2. a) Điều kiện để mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

OABC có đường kính BC là $\widehat{BOC} = 90^\circ$

($\beta = 90^\circ$) và $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\bullet \quad BC^2 = OB^2 + OC^2 = b^2 + c^2$$

$$\bullet \quad AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \widehat{BOC}$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$\bullet \quad AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos \widehat{AOC}$$

$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \gamma.$$

$$\text{Từ } (*) \text{ ta được } a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha + a^2 + c^2 - 2ac \cos \gamma = b^2 + c^2.$$

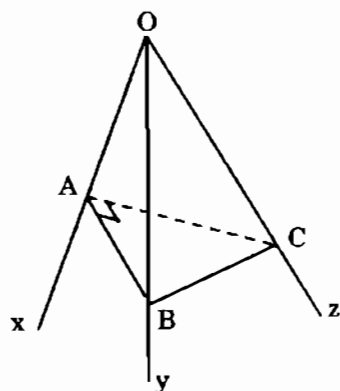
$$\text{Hay } 2a^2 - 2ab \cos \alpha - 2ac \cos \gamma = 0 \Leftrightarrow a - b \cos \alpha - c \cos \gamma = 0$$

Vậy nếu $\beta = 90^\circ$ và $a = b \cos \alpha + c \cos \gamma$ thì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC có đường kính là BC.

b) Nếu $a = b = c$ và $\alpha = \gamma = 60^\circ$ và $\beta = 90^\circ$ thì điều kiện của câu a) được thỏa mãn, nên mặt cầu ngoại tiếp OABC có đường kính là $BC = a\sqrt{2}$.

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là:

$$S_{mc} = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2.$$



ĐỀ 35

Câu 1.

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 - a$, gọi đồ thị là (C_a) .

1. Chứng minh rằng khi a thay đổi, đồ thị của hàm số luôn đi qua hai điểm cố định A và B . Xác định a để các tiếp tuyến của (C_a) tại A và B song song với nhau.
2. Tùy theo a hãy lập bảng biến thiên của hàm số.
3. Tìm các giá trị của a sao cho $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Câu 2.

1. Chứng tỏ rằng phương trình sau vô nghiệm: $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 2x = 2$
2. Cho phương trình $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$ sao cho $2a + 3b + 6c = 0$
Chứng tỏ rằng phương trình đã cho có nghiệm trên các khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là:
 $mx + (m - 2)y - m = 0$ và $(m - 2)x - my - m + 6 = 0$ (m là một tham số)
Chứng minh rằng khi m thay đổi, hai đường thẳng a và b luôn cắt nhau.
Tìm quỹ tích giao điểm I của chúng.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$; $B(0; b; 0)$; $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$.

1. Tìm một hệ thức giữa a, b, c để cho mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$.
2. Giả sử điều kiện trên được nghiệm đúng, hãy tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện OABC.

Câu 5.

1. Cho phương trình $5 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = a \cdot 36^x$.
a) Giải phương trình khi $a = 7$.
b) Với giá trị nào của a thì phương trình vô nghiệm?
2. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) .
a) Chứng minh rằng tồn tại một mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$.
b) Cho $R_1 = 10$, $R_2 = \sqrt{61}$, $AB = 12$, $O_1O_2 = 7$. Tính diện tích của mặt cầu (S) .

Giải

Câu 1.

1. * Phương trình của hàm số có thể viết

$$a(x^2 - 1) = y - x^3$$

Phương trình trên nghiệm đúng với mọi a khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ y - x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ và } y = 1 \\ x = -1 \text{ và } y = -1 \end{cases}$$

Vậy đồ thị (C_a) luôn đi qua hai điểm cố định $A(1; 1)$; $B(-1; -1)$.

* Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax$

Các tiếp tuyến của (C_a) tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$$k_1 = f'(1) = 3 + 2a; k_2 = f'(-1) = 3 - 2a$$

Hai tiếp tuyến tại A và B song song với nhau khi và chỉ khi:

$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow 3 + 2a = 3 - 2a \Leftrightarrow a = 0$$

Vậy nếu $a = 0$ thì các tiếp tuyến của (C_a) tại A và B song song với nhau.

2. Lập bảng biến thiên của hàm số

Hàm số đã cho có đạo hàm $y' = 3x^2 + 2ax$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{2a}{3}$$

- (i) $a = 0$: $y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

- (ii) $a < 0$:

x	$-\infty$	0		$-\frac{2a}{3}$	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$-a$		$\frac{4}{27}a^3 - a$	$+\infty$	

- (iii) $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{2a}{3}$	0	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			$\frac{4}{27}a^3 - a$		-a		$+\infty$
	$-\infty$						

- (iii) Xác định a để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

α Điều kiện cần:

$$|y| \leq 1 \text{ khi } |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq f(0) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -a \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1$$

β) Điều kiện đủ: Giả sử ta có $-1 \leq a \leq 1$. Ta luôn có $f(-1) = -1$; $f(1) = 1$.

• $a = 0$: $y = x^3$ hiển nhiên đúng.

• $0 < a \leq 1$: Suy ra $-\frac{2a}{3} \in [-1; 1]$ (1)

$$0 < a \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq -a < 0 \\ \frac{4}{27}a^3 - a < \frac{4}{27}a^3 < 1 \end{cases} \quad (2)$$

• $-1 \leq a < 0$: Suy ra $-\frac{2a}{3} \in [-1; 1]$.

$$-1 \leq a < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 < -a \leq 1 \\ \frac{4}{27}a^3 - a \geq \frac{4}{27}a^3 > -1 \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra, nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Tóm lại, nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Câu 2.

1. Xét phương trình $(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 2x = 2$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin 2x = 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \text{ và } \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 & (a) \\ \sin 2x = -1 \text{ và } \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1 & (b) \end{cases}$$

• Xét hệ (a): $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nhận thấy họ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ không nghiệm đúng phương trình $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$.

Suy ra hệ (a) vô nghiệm.

• Chứng minh tương tự, hệ (b) cũng vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. Đặt $t = \tan x$. Do $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right)$ nên $t \in (0; 1)$

Ta được phương trình: $at^2 + bt + c = 0, t \in (0; 1)$.

Như vậy ta chỉ cần chứng minh phương trình $at^2 + bt + c = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.

Xét hàm số $f(t) = at^2 + bt + c, t \in [0; 1]$.

Rõ ràng $f(t)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

$$\text{Ta có: } f(0) = c, f(1) = a + b + c, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{a + 2b + 4c}{4}$$

$$\text{Suy ra } f(0) + f(t) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 (*)$$

- Nếu cả ba số $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ đều bằng 0 thì hiển nhiên $t = \frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình $f(t) = 0$ thuộc khoảng $(0; 1)$.
 - Nếu trong ba số $f(0)$, $f(t)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ có ít nhất một số khác 0 thì từ (*) ta dễ suy ra, trong ba số này phải có hai số khác 0 và trái dấu. Suy ra phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.
- Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

Câu 3.

1. Tính $\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$.

$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2e^x}{1+e^x}\right) dx = 1 - 2 \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx.$$

Đặt $t = 1 + e^x$. Suy ra $dt = e^x dx$.

Khi $x = 0$ thì $t = 2$ và khi $x = 1$ thì $t = 1 + e$.

Ta được $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_2^{1+e} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_2^{1+e} = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln \frac{1+e}{2}$.

Vậy $\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx = 1 - 2 \ln \frac{1+e}{2}$.

2. a: $mx + (m-2)y - m = 0$ và b: $(m-2)x - my - m + 6 = 0$ (m là một tham số).

Xét định thức $D = \begin{vmatrix} m & (m-2) \\ (m-2) & -m \end{vmatrix} = -[m^2 + (m-2)^2] \neq 0$, với mọi m .

Vậy hai đường thẳng a và b luôn cắt nhau.

Phương trình của a có thể viết dưới dạng: $m(x+y-1) - 2y = 0$ (1).

Phương trình (1) nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Suy ra a luôn đi qua điểm cố định $A(1; 0)$.

Phương trình của b có thể viết dưới dạng: $m(x-y-1) - 2x + 6 = 0$ (2).

Phương trình (2) nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ -2x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Suy ra b luôn đi qua điểm cố định $B(3; 2)$.

Mặt khác, vector pháp tuyến của a và b lần lượt là

$$\vec{u} = (m; m-2) \text{ và } \vec{v} = (m-2; -m).$$

Dễ thấy $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ nên a và b là hai đường thẳng vuông góc với nhau. Do vậy nếu gọi I là giao điểm của a và b thì ta luôn có $\widehat{AIB} = 90^\circ$.

Suy ra, quỹ tích của I là đường tròn (T) đường kính AB.

- Tâm của (T) là trung điểm J của AB, suy ra $J(2; 1)$.

- Bán kính của (T): $R = \frac{1}{2} AB = 2\sqrt{2}$

Vậy quỹ tích của I là đường tròn có phương trình: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$.

Câu 4.

1. a) Phương trình của mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ khi và chỉ khi: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

b) Gọi V là thể tích khối tứ diện OABC, ta có: $V = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow 1 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 162.$$

Do đó $V \geq 27$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3, b = 6, c = 9$.

Vậy $\min V = 27$ khi $a = 3, b = 6, c = 9$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $5 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = a \cdot 36^x$.

a) $a = 7 \Rightarrow 5 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 7 \cdot 36^x$ (1). •

$$(1) \Leftrightarrow 5 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 7 \cdot 4^x \cdot 9^x \Leftrightarrow 5 + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} = 7 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x.$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x + 5 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{9}{4}\right)^x$ ($t > 0$), phương trình trở thành:

$$2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{5}{2}.$$

• $t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

• $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{5}{2}\right)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0, x = \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{5}{2}\right)$.

b) Bằng cách biến đổi như trên và đặt $t = \left(\frac{9}{4}\right)^x$ ($t > 0$), ta được phương trình:

$$2t^2 - at + 5 = 0 \quad (2).$$

Biệt thức $\Delta = a^2 - 40$.

i) Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{10} < a < 2\sqrt{10}$ thì (2) vô nghiệm, nên phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

ii) Nếu $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = a^2 - 40 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2\sqrt{10} \\ a \geq 2\sqrt{10} \end{cases}$ thì (2) có hai nghiệm t_1, t_2 ($t_1 \leq t_2$).

• $a \leq -2\sqrt{10}$: Suy ra $P = t_1 \cdot t_2 = \frac{5}{2} > 0$ và $S = t_1 + t_2 = \frac{a}{2} < 0$. Do đó $t_1 < 0$ và $t_2 < 0$.

Trường hợp này phương trình đã cho vô nghiệm.

• $a \geq 2\sqrt{10}$: Suy ra $P = t_1 \cdot t_2 = \frac{5}{2} > 0$ và $S = t_1 + t_2 = \frac{a}{2} > 0$. Do đó $t_1 > 0$ và $t_2 > 0$.

Trường hợp này phương trình đã cho có nghiệm.

Vậy nếu $a < 2\sqrt{10}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

2. a) Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cùng đi qua A, B nên tâm O_1 và O_2 của chúng nằm trên mặt trung trực (α) của đoạn thẳng AB. Dựng trục Δ_1 và Δ_2 của hai đường tròn (O_1) và (O_2) , dĩ nhiên Δ_1 và Δ_2 nằm trên (α) . Gọi I là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 thì I là tâm của mặt cầu (S) đi qua (O_1) và (O_2) . Vậy luôn tồn tại mặt cầu (S) đi qua (O_1) và (O_2) , bán kính của (S) là $R = IA$.

b) Gọi K là trung điểm của AB, thì $O_1K \perp AB$ và $O_2K \perp AB$. Ta có:

$$O_1K = \sqrt{O_1A^2 - KA^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$O_2K = \sqrt{O_2A^2 - KA^2} = \sqrt{61 - 36} = 5$$

Trong mp (α) , vì $IO_1 \perp KO_1$ và $IO_2 \perp KO_2$ nên tứ giác IO_1KO_2 nội tiếp trong đường tròn (T) đường kính IK, (T) cũng là đường tròn ngoại tiếp của ΔO_1KO_2 .

Áp dụng định lý hàm số cosin trong ΔO_1KO_2 :

$$O_1K^2 + O_2K^2 - 2O_1K \cdot O_2K \cdot \cos \widehat{O_1KO_2} = (O_1O_2)^2$$

$$64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos \widehat{O_1KO_2} = 49.$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{O_1KO_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{O_1KO_2} = 60^\circ.$$

Áp dụng định lý hàm số sin trong ΔO_1KO_2 :

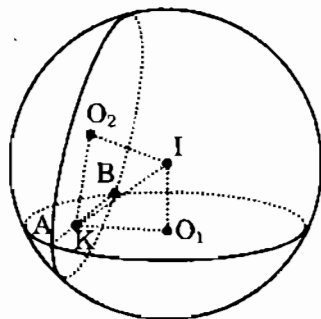
$$IK = \frac{O_1O_2}{\sin \widehat{O_1KO_2}} = \frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

Bán kính của mặt cầu (S) là:

$$R = \sqrt{IK^2 + KA^2} = \sqrt{\frac{196}{3} + 36} = \sqrt{\frac{304}{3}}$$

Diện tích của mặt cầu (S):

$$S = 4\pi R^2 = \frac{1216\pi}{3}$$



ĐỀ 36

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = (x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $a = 1$ và $b = -1$.
2. Các tham số a và b thỏa mãn điều kiện gì để hàm số có cực đại và cực tiểu.
3. Chứng minh rằng với mọi a, b phương trình $(x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3 = 0$ không thể có ba nghiệm phân biệt.

Câu 2.

1. Chứng minh rằng, nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$ thì tam giác đó là một tam giác cân.
2. Chứng minh rằng $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \frac{2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \cos x} dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1; 5)$, các đường cao BM và CN nằm trên các đường thẳng có phương trình lần lượt $3x - 4y + 11 = 0$ và $2x + 3y - 11 = 0$.
Tính diện tích của tam giác ABC.

Câu 4.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình

$$\text{tham số: } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

1. Tìm giao điểm của Δ với mặt phẳng (Oyz).
2. Viết phương trình của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của Δ trên mặt phẳng (Oxz).
3. Viết phương trình của mặt cầu (S) có bán kính $R = 2$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên đường thẳng Δ .

Câu 5.

1. Giải phương trình $x^3 \cdot 3^{\log_3 27} = 3^{10}$.
2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu (O) đi qua A và tiếp xúc với hai cạnh SB và SC tại trung điểm của mỗi cạnh đó.
a) Chứng minh rằng mặt cầu (O) đi qua trung điểm của cạnh AB và AC.
b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu (O) với đường thẳng SA là D. Tính AD và SD.

Giải

Câu 1.

1. Khi $a = 1, b = -1$: phương trình của hàm số trở thành $y = x^3 + 6x$. (độc giả tự giải).
2. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3[x^2 + 2(a + b)x + a^2 + b^2]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(a + b)x + a^2 + b^2 = 0.$$

$$\Delta' = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab.$$

Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị (một cực đại và một cực tiểu) là phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi x qua hai nghiệm đó, nghĩa là:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2ab > 0 \Leftrightarrow ab > 0.$$

3. Chia trường hợp:

- (i) $ab \leq 0$: Suy ra $\Delta' \leq 0$, do đó $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong trường hợp này hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, thế nên phương trình $f(x) = 0$ có không quá một nghiệm, nghĩa là không thể có ba nghiệm phân biệt.
- (ii) $ab > 0$: Với điều kiện này, hàm số có cực đại và cực tiểu. Gọi hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Bằng cách chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được:

$$f(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{3}(x + a + b) - ab(4x + a + b).$$

$$\text{Ta có } f(x_1) = -ab(4x_1 + a + b), f(x_2) = -ab(4x_2 + a + b).$$

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = (ab)^2[16x_1x_2 + 4(a + b)(x_1 + x_2) + (a + b)^2].$$

$$\text{Với } x_1x_2 = a^2 + b^2 \text{ và } x_1 + x_2 = -2(a + b).$$

$$\begin{aligned} \text{Sau khi rút gọn ta được } f(x_1) \cdot f(x_2) &= (ab)^2[9a^2 + 9b^2 - 14ab] \\ &= (ab)^2[7(a - b)^2 + 2(a^2 + b^2)] > 0. \end{aligned}$$

Điều kiện trên chứng tỏ điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị nằm cùng một phía đối trục hoành, do đó đồ thị của hàm số không thể cắt trục hoành tại ba điểm, do vậy phương trình $f(x) = 0$ không thể có ba nghiệm phân biệt.

Tóm lại, với mọi a, b phương trình $f(x) = 0$ không thể có ba nghiệm phân biệt.

Câu 2.

$$1. \text{ Ta có: } \frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin B} = -2\cos(B + C).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin B} = -2(\cos B \cos C - \sin B \sin C)$$

$$\Leftrightarrow \sin C = -2\sin B \cos B \cos C + 2\sin^2 B \sin C.$$

$$\Leftrightarrow \sin C(1 - 2\sin^2 B) = -\sin 2B \cos C \Leftrightarrow \sin C \cos 2B = -\sin 2B \cos C.$$

$$\Leftrightarrow \tan 2B = -\tan C \Leftrightarrow \tan 2B = \tan(-C) \Leftrightarrow 2B = -C + k\pi$$

Chỉ có thể xảy ra khi $k = 1$.

$$\text{Ta được: } 2B = \pi - C \Leftrightarrow 2B = (A + B + C) - C \Leftrightarrow A = B.$$

Vậy ABC là tam giác cân tại C.

$$2. \text{ Ta có: } 1 < \log_2 3 < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt{\log_2 3} < \sqrt{2}.$$

$$\text{và } \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} \Rightarrow \sqrt{\log_3 2} = \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}$$

$$\text{Như vậy } \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} = \sqrt{\log_2 3} + \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}.$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{\log_2 3} \text{ thì } 1 < x < \sqrt{2} \text{ và } \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} = x + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ với } x \in [1; \sqrt{2}].$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0, x \in [1; \sqrt{2}].$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; \sqrt{2}]$, do đó:

$$1 < x < \sqrt{2} \Rightarrow f(1) < f(x) < f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2 < x + \frac{1}{x} < \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Cho } x = \sqrt{\log_2 3} \text{ ta được: } 2 < \sqrt{\log_2 3} + \frac{1}{\sqrt{\log_2 3}} < \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Hay } 2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (đpcm).}$$

Câu 3.

$$1. \text{ Ta có: } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \cos x} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \tan x. \text{ Suy ra } dt = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

$$\text{Ta được } \frac{1}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2t} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2t} dt.$$

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{6} \text{ thì } t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ và } x = \frac{\pi}{4} \text{ thì } t = 1.$$

$$\text{Ta được } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = -\ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

2. Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng CN nên có vectơ pháp tuyến $\vec{u} = (3; -2)$. Phương trình của đường thẳng AB là:

$$3(x - 1) - 2(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 7 = 0.$$

Đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BM nên có vectơ pháp tuyến $\vec{v} = (4; 3)$. Phương trình của đường thẳng AC là:

$$4(x - 1) + 3(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 19 = 0.$$

Tọa độ của C nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ 3x - 4y + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 2).$$

Tọa độ của C nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 19 = 0 \\ 2x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C(4; 1).$$

Kẻ đường AH của tam giác ABC, ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH$.

• $BC = \sqrt{26}$.

• Phương trình của đường thẳng BC là $x + 5y - 9 = 0$.

$$AH = d(A, BC) = \frac{|1 + 5 \cdot 5 - 9|}{\sqrt{26}} = \frac{17}{\sqrt{26}}.$$

Diện tích của tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{26} \cdot \frac{17}{\sqrt{26}} = \frac{17}{2}$ (đvdt).

Câu 4. Theo giả thiết Δ có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

1. Tọa độ giao điểm của Δ và mặt phẳng (Oyz) nghiệm đúng hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{13}{3} \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm $I\left(0; -\frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

2. Gọi Δ' là hình chiếu vuông góc của Δ trên mặt phẳng (Oxz), dễ thấy

$$\text{phương trình } \Delta' \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 4 - t \end{cases}$$

3. Gọi I là tâm của mặt cầu (S), do $I \in \Delta$ nên $I(1 + 3t; -1 + 2t; 4 - t)$.

Từ giả thiết ta có:

$$d(I, (Oxy)) = R \Leftrightarrow |4 - t| = 2 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = 6.$$

Suy ra $I(7; 3; 2)$ hoặc $I(19; 11; -2)$.

Vậy phương trình của mặt (S) là:

$$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 4 \text{ hoặc } (x - 19)^2 + (y - 11)^2 + (z + 2)^2 = 4$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $x^3 \cdot 3^{\log_3 27} = 3^{10}$.

Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$.

Lấy lôgarit hai vế theo cơ số 3, ta được:

$$3\log_3 x + \log_3 27 = 10 \Leftrightarrow 3\log_3 x + 3\log_3 3 - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} - 10 = 0.$$

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình trở thành: $3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = \frac{1}{3}$.

• $t = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27$.

• $t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$.

2. a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và SC. Do SB là tiếp tuyến của (O) tại I nên điểm B nằm bên ngoài mặt cầu (S). Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng AB và mặt cầu (O).

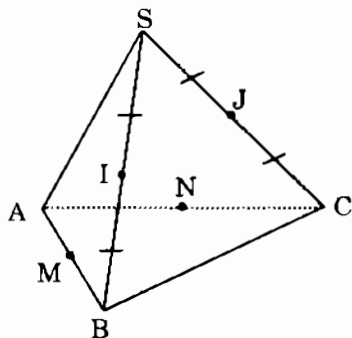
Ta có $BI^2 = BM \cdot BA \Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = BM \cdot a$.

Suy ra $BM = \frac{a}{2}$. Vậy M là trung điểm của cạnh AB.

Chứng minh tương tự N là trung điểm của cạnh AC.

- b) SI là tiếp tuyến của (O) kẻ từ S, I là tiếp điểm. Nếu SA cắt (O) tại D thì có:

$$SD \cdot SA = SI^2 \Rightarrow SD = \frac{SI^2}{SA} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Suy ra } AD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$



ĐỀ 37

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
2. Trên (C) lấy điểm M bất kì có hoành độ $x = a$. Biện luận theo a số tiếp tuyến của (C) kẻ từ điểm A.

Câu 2.

1. Chứng minh rằng, nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$ thì tam giác đó là một tam giác cân.
2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[4]{2x+5} = x+1$.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin^3 x} dx$.
2. Chứng minh rằng trong mặt phẳng tọa độ Oxy, không tồn tại một tam giác cân có góc tại đỉnh bằng 45° và các đỉnh của nó có tọa độ là những số nguyên.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (α) và (β) định bởi: (α): $2kx + y - z + 1 = 0$, (β): $x - ky + z - 1 = 0$ (k là một tham số).

1. Xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (β).
2. Gọi Δ là giao tuyến của (α) và (β). Hãy xác định giá trị của k để Δ nằm trên mặt phẳng (Oyz).

Câu 5.

1. Giải phương trình $2^{2-x} + 3^{3-2x} = 5^x$.
2. Cho hình chóp tam giác S.ABC với $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BC = 5a$ và các cạnh bên SA, SB, SC cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc α . Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải

1. Khảo sát hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (độc giả tự giải).
2. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Trên (C) lấy điểm $A(a; a^3 - 3a^2 + 2)$ bất kì. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A có dạng: $y = (3a^2 - 6a)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 2$
 $\Leftrightarrow y = (3a^2 - 6a)x - 2a^3 + 3a^2 + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến tại A:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (3a^2 - 6a)x - 2a^3 + 3a^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x + 2a - 3)(x - a)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a + 3 \end{cases}$$

* $-2a + 3 = a \Leftrightarrow a = 1$, khi đó A ở vị trí $A_0(1; 0)$, rõ ràng tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A_0 không cắt đồ thị tại điểm thứ hai. Trường hợp này, chỉ có một tiếp tuyến của (C) qua A với phương trình là $y = -3x + 3$.

* $-2a + 3 \neq a \Leftrightarrow a \neq 1$ thì tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ a sẽ cắt (C) tại điểm thứ hai A_1 có hoành độ $a_1 = -2a + 3$. Như vậy có nghĩa là, qua điểm A trên (C) với hoành độ $a \neq 1$, ta vẽ được với (C) hai tiếp tuyến, một tiếp tuyến nhận A làm tiếp điểm và một tiếp tuyến nhận điểm A_1 có hoành độ $a_1 = -2a + 3$ làm tiếp điểm.

Tóm lại:

- Khi $a = 1$: Có một tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.
- Khi $a \neq 1$: Có hai tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

Câu 2.

1. Theo giả thiết $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} = \tan \frac{B}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} = \tan \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2} \right) = \tan \frac{B}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{B}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan^3 \frac{A}{2} - \tan^3 \frac{B}{2} \right) + \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} \right) \left(\tan^2 \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

Vì $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} > 0$, nên từ (2) ta có:

$$\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} + k\pi.$$

Chỉ xảy ra khi $k = 0$, như thế ta được: $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B$.

Vậy tam giác ABC cân tại C.

2. Xét phương trình: $\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{2x+5} = x+1$.

Tập xác định của phương trình $D = \left[-\frac{5}{2}; +\infty \right)$.

Nhận thấy nếu $x = -\frac{5}{2}$ thì phương trình không nghiệm đúng. Do đó ta

tim nghiệm của phương trình trong miền $x > -\frac{5}{2}$.

Đặt $a = 2x + 5 > 0$, $b = x + 4 > 0$. Suy ra $a - b = x + 1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} = a - b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} + a = \sqrt[3]{b} + b$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x} + x$ với $x \in (0; +\infty)$.

Suy ra $f(a) = \sqrt[4]{a} + a$ và $f(b) = \sqrt[4]{b} + b$.

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{4x} + 1 > 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó:

$$\sqrt[4]{a} + a = \sqrt[4]{b} + b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = -1$.

Câu 3.

1. Tính $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 x} dx$.

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Khi $x = \frac{\pi}{3}$ thì $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \left(\frac{1+t^2}{2t} \right)^3 \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt.$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ln 3.$$

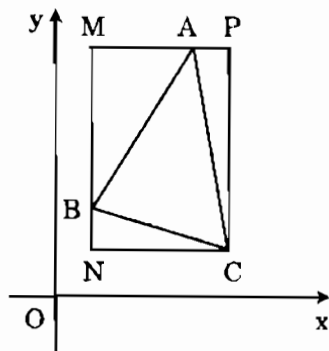
2. Giả sử tồn tại tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC} = 45^\circ$ và các đỉnh A, B, C có tọa độ nguyên. Gọi S là diện tích của tam giác ABC, ta có:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} AB^2$$

Vì hai điểm A và B có tọa độ là những số nguyên nên AB^2 là một số nguyên dương.

Suy ra S là một số vô tỉ. (1)

Mặt khác, ta luôn có thể dựng được một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ (hoặc nằm trên các trục tọa độ) sao cho các đỉnh A, B, C nằm trên các cạnh của hình chữ nhật đó. Giả sử tam giác ABC nằm trong hình chữ nhật MNCP như hình bên.



Ta có: $S = S_{MNCP} - (S_{AMB} + S_{BNC} + S_{APC})$

Trong trường hợp này dễ thấy các diện tích S_{MNCP} , S_{AMB} , S_{BNC} , S_{APC} là các số hữu tỉ. (2)

Nhận thấy hai kết quả (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Vậy không tồn tại một tam giác cân có tại đỉnh bằng 45° và các đỉnh của nó có tọa độ là những số nguyên.

Câu 4. Theo giả thiết $(\alpha): 2kx + y - z + 1 = 0$, $(\beta): x - ky + z - 1 = 0$.

1. Các mặt phẳng (α) và (β) có pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha = (2k; 1; -1)$ và $\vec{n}_\beta = (1; -k; 1)$.

Ta có $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (1 - k; -1 - 2k; -2k^2 - 1) \neq \vec{0}$.

Suy ra với mọi k , hai mặt phẳng (α) và (β) luôn cắt nhau.

2. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (1 - k; -1 - 2k; -2k^2 - 1)$.

Để $\Delta \subset mp(Oyz)$ trước hết ta phải có điều kiện: $\vec{u} \perp \vec{i}$

$$\Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Khi $k = 1$, phương trình của (α) và (β) trở thành: $(\alpha): 2x + y - z + 1 = 0$,
 $(\beta): x - y + z - 1 = 0$.

Nhận thấy $M_0(0; 1; 2)$ là một điểm chung của (α) và (β) nên $M_0 \in \Delta$, hiển nhiên M_0 cũng nằm trên mặt phẳng (Oyz) , nên $\Delta \subset$ mặt phẳng (Oyz) .

Vậy giá trị cần tìm là $k = 1$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $2^{2-x} + 3^{2-2x} = 5^x$.

Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình.

Phương trình đã cho là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số: $f(x) = 2^{2-x} + 3^{2-2x}$ (C) và $g(x) = 5^x$ (L).

Dễ thấy $A(1; 5)$ là một giao điểm của (C) và (L).

Mặt khác:

• $f'(x) = -2^{2-x} \cdot \ln 2 - 2 \cdot 3^{2-2x} \cdot \ln 3 < 0$, nên $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

• $g(x) = 5^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (cơ số $a = 5 > 1$).

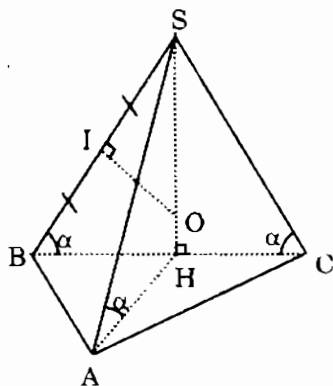
Do đó $A(1; 5)$ là giao điểm duy nhất của (C) và (L).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 1$.

2. Từ giả thiết ta dễ suy ra ΔABC là tam giác vuông tại A.

Kẻ đường cao SH của hình chóp thì HA, HB, HC là hình chiếu vuông góc của SA, SB, SC trên mặt phẳng (ABC) , suy ra $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = \alpha$. Dễ thấy các tam giác SHA, SHB, SHC cùng vuông tại H và bằng nhau, do đó $SA = SB = SC$ và $HA = HB = HC$. Như vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và đường thẳng SH là trục của đường tròn ngoại tiếp của ΔABC .

Mặt khác ΔABC vuông tại A, nên H là trung điểm của BC. Qua trung điểm I của



cạnh SB, dựng mặt phẳng trung trực của SB, gọi O là giao điểm của mặt phẳng này với đường thẳng SH, điểm O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Từ tam giác vuông SHB ta có

$$SH = BH \tan \alpha = \frac{5a}{2} \tan \alpha \quad \text{và} \quad SB = \frac{BH}{\cos \alpha} = \frac{5a}{2 \cos \alpha}.$$

Từ hai tam giác vuông SIO và SHB đồng dạng:

$$\frac{SO}{SB} = \frac{SI}{SH} \Rightarrow R = SO = \frac{SI \cdot SB}{SH} = \frac{SB^2}{2SH} = \frac{\left(\frac{5a}{2 \cos \alpha}\right)^2}{2 \cdot \frac{5a}{2} \tan \alpha} = \frac{5a}{2 \sin 2\alpha}$$

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

$$S_{m/c} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{5a}{2 \sin 2\alpha}\right)^2 = \frac{25\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}.$$

ĐỀ 38

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$. Gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.
2. Tìm trên trục tung các điểm sao cho từ đó vẽ được với đồ thị (C) bốn tiếp tuyến phân biệt.
3. Xác định các giá trị của m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.
2. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (x^4 + 1)^x$.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-4; 2)$, $B(6; 7)$, $C(2; -1)$.
 - a) Tìm tọa độ tâm của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.
 - b) Viết phương trình của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -5 - t \\ z = t \end{cases}.$$

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

- Tính góc φ tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .
- Viết phương trình của mặt phẳng (α) qua Δ_1 và song song với Δ_2 . Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 .

Câu 5.

- Giải phương trình $3^x + 4^x + 3.5^x = 10^x$.
- Cho hình chóp tam giác S.ABC trong đó đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, mặt bên SBC vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại cùng hợp với đáy một góc α . Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải

Câu 1.

- Khi $m = 0$ phương trình của hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

b) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$y' > 0$ khi $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

$y' < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = 0$.

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

- Bảng biến thiên:

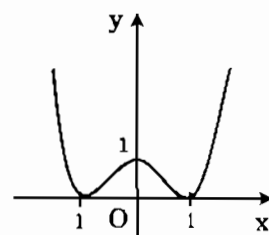
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		-	0	-	0	+
y	$+\infty$		1		0	$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		CT	CD	CT		

- Đồ thị: $y'' = 12x^2 - 4$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra đồ thị có hai điểm uốn

$$I\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{4}{9}\right) \text{ và } J\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{4}{9}\right).$$

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ là một hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.



2. Trên trục tung lấy điểm $M(0; b)$ bất kì, phương trình của đường thẳng Δ đi qua $M(0; b)$ với hệ số góc k có dạng $y = kx + b$.

Đường thẳng Δ và đồ thị (C) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = kx + b & (1) \\ 4x^3 - 4x = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta được phương trình $3x^4 - 2x^2 + b - 1 = 0$ (I).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình (I) trở thành $3t^2 - 2t + b - 1 = 0$ (II).

Gọi $f(t) = 3t^2 - 2t + b - 1$.

Nhận xét rằng, do (C) nhận trục tung làm trục đối xứng nên:

- Nếu số tiếp tuyến của (C) qua M là một số lẻ thì trong đó phải có một tiếp tuyến song song hoặc trùng với trục hoành, tiếp tuyến này có hệ số góc $k = 0$, tức là:

$$k = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

- Nếu số tiếp tuyến của (C) qua M là một số chẵn (2 hoặc 4) thì các tiếp tuyến này đều có hệ số khác 0 và từng cặp đối xứng với nhau qua trục tung.

Do đó để từ M vẽ được với (C) bốn tiếp tuyến phân biệt thì phương trình (I) phải có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác ± 1 , khi đó phương trình (II) có hai nghiệm dương phân biệt khác 0 và 1. Như thế ta phải có điều kiện:

$$\text{kiện: } \begin{cases} \Delta' > 0, P > 0, S > 0 \\ f(0) \neq 0, f(1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \Delta' = -3b + 4 > 0 \Leftrightarrow b < \frac{4}{3}$$

$$P = \frac{b-1}{3} > 0, b > 1.$$

$$\bullet S = \frac{2}{3} > 0.$$

$$\bullet f(0) \neq 0 \Rightarrow b \neq 1, f(1) \neq 0 \Rightarrow b \neq 0.$$

Từ các kết quả trên suy ra $1 < b < \frac{4}{3}$.

Vậy các điểm $M(0; b)$ với $1 < b < \frac{4}{3}$ thì từ M vẽ được với (C) bốn tiếp tuyến phân biệt.

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0 \quad (1).$$

Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng, thì bốn nghiệm đó có dạng:

$$-3x_0, -x_0, x_0, 3x_0 \quad (x_0 > 0), \text{ công sai của cấp số cộng này là } d = 2x_0.$$

Đặt $X = x^2$ ($X > 0$), phương trình (1) trở thành:

$$X^2 - 2(m+1)X + 2m+1 = 0 \quad (2).$$

Như thế phương trình (2) phải có hai nghiệm là: $X_1 = x_0^2$, $X_2 = 9x_0^2$.

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có: } \begin{cases} X_1 + X_2 = 2(m+1) \\ X_1 \cdot X_2 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_0^2 = 2(m+1) & (3) \\ 9x_0^4 = 2m+1 & (4) \end{cases}$$

Khử x_0 giữa (3) và (4) ta được phương trình: $9m^2 - 32m - 16 = 0$.

Phương trình trên có hai nghiệm $m = 4$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$.

Nếu $m = 4$ ta được cấp số cộng: $-3, -1, 1, 3$.

Nếu $m = -\frac{4}{9}$ ta được cấp số cộng: $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$.

Vậy: $m = 4, m = -\frac{4}{9}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 2.

$$1. \text{ Xét phương trình } \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2} \quad (1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \cos x(\cos 2x + \cos x) + \sin x(\cos 2x - \cos x) = 1.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x - \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) - \sin x(\sin x + \cos x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos 2x - \sin x) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos 2x - \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\bullet \cos 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + m2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + m\frac{2\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

2. Do $y = (x^4 + 1)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên lấy lôgarit tự nhiên hai vế ta được:

$$\ln y = x \ln(x^4 + 1).$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x :

$$\frac{y'}{y} = \ln(x^4 + 1) + x \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 1} = \ln(x^4 + 1) + \frac{4x^4}{x^4 + 1}.$$

$$\text{Suy ra: } y' = (x^4 + 1)^x \cdot \left(\ln(x^4 + 1) + \frac{4x^4}{x^4 + 1} \right).$$

Câu 3.

1. Ta có: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx.$

Đặt $t = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $t = 1$ và khi $x = \frac{5\pi}{12}$ thì $t = \sqrt{3}.$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{12}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|t| \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 3.$$

2. A(-4; 2), B(6; 7), C(2; -1).

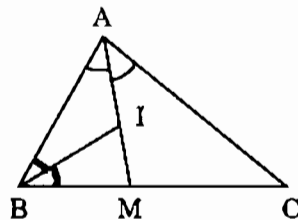
a) Trong tam giác ABC, kẻ phân giác trong AM và trong tam giác ABM kẻ phân giác trong BI. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Ta có $\vec{MB} = -\frac{AB}{AC} \vec{MC}.$

Trong đó $AB = 5\sqrt{5}, AC = 3\sqrt{5}.$

Suy ra $\vec{MB} = -\frac{5}{3} \vec{MC}.$

Do đó $\begin{cases} x_M = \frac{6 + \frac{5}{3} \cdot 2}{1 + \frac{5}{3}} = \frac{7}{2} \\ y_M = \frac{7 + \frac{5}{3} \cdot (-1)}{1 + \frac{5}{3}} = 2 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; 2\right).$



Ta cũng có $\vec{IA} = -\frac{AB}{BM} \vec{IM}.$ Với $BM = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$

Suy ra $\vec{IA} = -2 \vec{IM}.$

Do đó $\begin{cases} x_I = \frac{-4 + 2 \cdot \frac{7}{2}}{1 + 2} = 1 \\ y_I = \frac{2 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(1; 2).$

Vậy tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là I(1; 2).

b) Phương trình của đường thẳng BC: $\frac{x-6}{2-6} = \frac{y-7}{-1-7} \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0.$

Bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC:

$$R = d(I, BC) = \frac{|2.1 - 2 - 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Phương trình của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

Câu 4. $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -5 - t \\ z = t \end{cases}$.

1. Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(2; -5; 3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(3; -5; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (-2; -1; 1)$

Do đó $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; -3; 3)$, $\overline{M_1M_2} = (1; 0; -3)$.

Suy ra $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overline{M_1M_2} = -6 \neq 0$.

Vậy hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

2. Ta có $\cos\varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\varphi = 60^\circ$.

3. Mặt phẳng (P) qua Δ_1 và song song với Δ_2 nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (3; -3; 3)$, vectơ này cùng phương với vectơ $\vec{w} = (1; -1; 1)$.

Ngoài ra $M_1(2; -5; 3) \in \Delta_1$ nên $M_1(2; -5; 3) \in (\alpha)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y + 5) + 1 \cdot (z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 10 = 0.$$

Khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 :

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M_2, (\alpha)) = \frac{|3 - (-5) + 0 - 10|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Câu 5.

1. Xét phương trình $3^x + 4^x + 3.5^x = 10^x$.

Trước hết ta thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$3^x + 4^x = 5^x(2^x - 3) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 2^x - 3 \quad (*)$$

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số:

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \quad (C) \text{ và } g(x) = 2^x - 3 \quad (L).$$

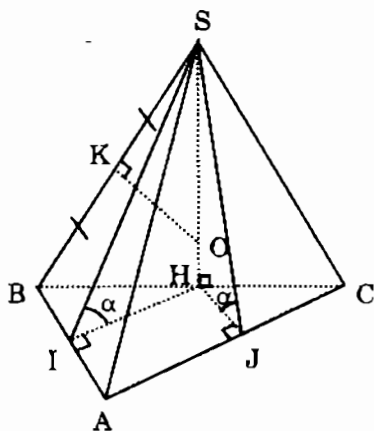
Dễ thấy $A(2; 1)$ là một giao điểm của (C) và (L).

Mặt khác, $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $A(2; 1)$ là giao điểm duy nhất của (C) và (L).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 2$.

2. Kẻ đường cao SH của hình chóp, do $(SBC) \perp (ABC)$ và $(SBC) \cap (ABC) = BC$ nên $SH \perp BC$ và $H \in BC$.

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC thì $SI \perp AB$ và $SJ \perp AC$, suy ra $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = \alpha$.
 Để thấy hai tam giác SHI và SHJ cùng vuông tại H và bằng nhau, do đó $HI = HJ$ và $SI = SJ$. Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên tứ giác AIHJ là hình vuông, suy ra AH là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, như thế H là trung điểm của BC.
 Gọi K là trung điểm của SB, qua K dựng mặt phẳng trung trực của SB, mặt phẳng này cắt SH tại điểm O, điểm O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.



Từ tam giác vuông SHI:

$$SH = SI \tan \alpha = \frac{a}{2} \tan \alpha, \text{ suy ra } SB = \frac{a}{2} \sqrt{\tan^2 \alpha + 2}$$

Hai tam giác vuông SKO và SHB đồng dạng cho:

$$\frac{SO}{SB} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SO = \frac{SK \cdot SB}{SH} = \frac{SB^2}{2SH} = \frac{a(\tan^2 \alpha + 2)}{4 \tan \alpha}$$

Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

$$R = \frac{a(\tan^2 \alpha + 2)}{4 \tan \alpha}$$

ĐỀ 39

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$, gọi đồ thị là (C).

- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Chứng minh rằng đồ thị (C) có trục đối xứng song song với trục tung, từ đó tìm tọa độ giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành.

Câu 2.

- Giải phương trình $4\cos^2 x - \sin 2x - \tan x = 0$.
- Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^3 \cdot (x+2)^4}$.

Câu 3.

1. Tính tích phân
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình lần lượt là $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
 và $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau. Xác định tọa độ tiếp điểm của chúng.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+9}{1} = \frac{z-7}{1} \text{ và điểm } M\left(-5; -\frac{5}{2}; 5\right).$$

1. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Viết phương trình của mặt phẳng (α) qua A, B, C.

2. Tìm góc φ tạo bởi Δ và mặt phẳng (α) .

3. Tìm phương trình đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của Δ trên mặt phẳng (α) .

Câu 5.

1. Giải phương trình $\left(\frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{2}\right)^x + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^{2x} = \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^x$.

2. Cho tứ diện ABCD với $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$.

a) Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện trùng nhau.

b) Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Giải

Câu 1.

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4(x^3 - 3x^2 - x + 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$				
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		-10		6		-10		$+\infty$

2. * Gọi $I(1; 0)$. Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, hệ Oxy biến thành hệ IXY.

Áp dụng công thức chuyển trục: $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$

Thế vào phương trình của hàm số đã cho, ta được:

$$Y = (X + 1)^4 - (X + 1)^3 - 2(X + 1)^2 + 12(X + 1) - 1$$

$$\Leftrightarrow Y = X^4 - 8X^2 + 6.$$

Ta dễ chứng minh được $Y = X^4 - 8X^2 + 6$ là một hàm số chẵn trong hệ IXY, nên đồ thị (C) của hàm số nhận trục tung IY làm trục đối xứng, trục đối xứng này có phương trình: $X = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy trong hệ Oxy, đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị (C), đó là đường thẳng song song với trục tung.

* Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành trong hệ IXY:

$$X^4 - 8X^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \pm\sqrt{4 + \sqrt{10}} \\ X = \pm\sqrt{4 - \sqrt{10}} \end{cases}$$

Suy ra đồ thị (C) cắt trục Ox trong hệ Oxy tại bốn điểm có tọa độ là: $(1 \pm \sqrt{4 + \sqrt{10}}; 0)$, $(1 \pm \sqrt{4 - \sqrt{10}}; 0)$.

Câu 2.

1. Xét phương trình $4\cos^2 x - \sin 2x - \tan x = 0$ (1).

Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Đặt $t = \tan x$, phương trình (1) trở thành:

$$\frac{4}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} - t = 0 \Leftrightarrow 4 - 2t - t(1+t^2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (vì } t^2 + t + 4 > 0)$$

Ta được $t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Hàm số $y = f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^3 \cdot (x+2)^4}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$.

* Tính $f'(2)$:

Đặt $g(x) = \frac{1}{(x+1)^3 \cdot (x+2)^4}$, ta được $f(x) = (x-2)^2 \cdot g(x)$.

$$f'(x) = 2(x-2) \cdot g(x) + (x-2)^2 \cdot g'(x).$$

Suy ra $f'(2) = 0$ (1)

* Khi $x \in D \setminus \{2\}$ thì $y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^3 \cdot (x+2)^4} \neq 0$. Ta có:

$$\ln |y| = \ln \left| \frac{(x-2)^2}{(x+1)^3 \cdot (x+2)^4} \right| = 2\ln |x-2| - 3\ln |x+1| - 4\ln |x+2|$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x : $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+2} = \frac{-5x^2 + 10x + 24}{(x-2)(x+1)(x+2)}$.

$$\text{Suy ra } y' = y \cdot \frac{-5x^2 + 10x + 24}{(x-2)(x+1)(x+2)} = \frac{(x-2)(-5x^2 + 10x + 24)}{(x+1)^4 \cdot (x+2)^5} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } y' = \frac{(x-2)(-5x^2 + 10x + 24)}{(x+1)^4 \cdot (x+2)^5}.$$

Câu 3.

$$1. \text{ Ta có: } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{6} \text{ thì } t = 1 \text{ và khi } x = \frac{\pi}{3} \text{ thì } t = \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta được } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{4} \ln 3.$$

$$2. (C_1): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \text{ và } (C_2): x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0.$$

a) Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1; 2)$ và bán kính $R_1 = 3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3; 5)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Khoảng cách giữa hai tâm của (C_1) và (C_2) : $d = I_1I_2 = 5$.

Suy ra $d = R_1 + R_2 = 5$.

Vậy hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau.

Gọi A là tiếp điểm của (C_1) và (C_2) , thì A là tâm vị tự trong của (C_1) và

$$(C_2), \text{ do đó: } \overline{AI_1} = -\frac{R_1}{R_2} \overline{AI_2} = -\frac{3}{2} \overline{AI_2}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_A = \frac{-1 + \frac{3}{2} \cdot 3}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{7}{5} \\ y_A = \frac{2 + \frac{3}{2} \cdot 5}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{7}{5}; \frac{19}{5}\right).$$

b) Do (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài, nên chúng có ba tiếp tuyến chung.

• Tiếp tuyến chung tại A: Gọi tiếp tuyến này là (D) , thì (D) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overline{I_1I_2} = (4; 3)$.

$$\text{Phương trình của } (D): 4\left(x - \frac{7}{5}\right) + 3\left(y - \frac{19}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 17 = 0 \quad (1)$$

• Gọi B là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (C_1) và (C_2) , thì B là tâm vị tự ngoài của (C_1) và (C_2) , ta có:

$$\overline{BI_1} = \frac{R_1}{R_2} \overline{BI_2} = \frac{3}{2} \overline{BI_2}$$

$$\text{Tọa độ B: } \begin{cases} x_B = \frac{-1 - \frac{3}{2} \cdot 3}{1 - \frac{3}{2}} = 11 \\ y_B = \frac{2 - \frac{3}{2} \cdot 5}{1 - \frac{3}{2}} = 11 \end{cases} \Rightarrow B(11; 11).$$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$$a(x - 1) + b(y - 11) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 11a - 11b = 0.$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi:

$$d(I_1, \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|a(-1) + b \cdot 2 - 11a - 11b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3.$$

$$\Leftrightarrow |4a + 3b| = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 15a^2 + 24ab + 8b^2 = 0$$

Cho $a = 8$ thì được $b^2 + 24b + 120 = 0$.

Giải được $b = 2(-6 \pm \sqrt{6})$.

Suy ra phương trình hai tiếp tuyến chung ngoài của (C_1) và (C_2) là:

$$8x + 2(-6 + \sqrt{6})y + 44 - 11\sqrt{6} = 0 \quad (2)$$

$$8x - 2(6 + \sqrt{6})y + 44 + 11\sqrt{6} = 0 \quad (3)$$

Vậy (C_1) và (C_2) có ba tiếp tuyến chung định bởi (1), (2) và (3).

Câu 4. Theo giả thiết $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y+9}{1} = \frac{z-7}{1}$ và điểm $M\left(-5; -\frac{5}{2}; 5\right)$.

1. Ta có $A(-5; 0; 0)$, $B(0; -\frac{5}{2}; 0)$, $C(0; 0; 5)$.

Phương trình của mặt phẳng (α) qua A, B, C là:

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{\left(-\frac{5}{2}\right)} + \frac{z}{5} = 1 \Leftrightarrow x + 2y - z + 5 = 0.$$

2. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(3; -9; 7)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

Suy ra $\sin \varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{1}{2}$. Vậy $\varphi = 30^\circ$.

3. Gọi (β) là mặt phẳng qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (α) thì d là giao tuyến của (α) và (β) . Mặt phẳng (β) đi qua $M_0(3; -9; 7)$ và có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{a} = [\vec{u}, \vec{n}] = (-3; 3; 3), \vec{a} \text{ cùng phương với } \vec{b} = (-1; 1; 1).$$

Do đó mặt phẳng (β) có phương trình là:

$$-1.(x-3) + 1.(y+9) + 1.(z-7) = 0 \Leftrightarrow -x + y + z + 5 = 0.$$

Vectơ chỉ phương của d : $\vec{v} = [\vec{n}, \vec{b}] = (3; 0; 3)$, cùng phương với vectơ $\vec{w} = (1; 0; 1)$.

Tọa độ các điểm nằm trên d nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - x + 5 = 0 \\ -x + y + z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow N_0\left(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, 0\right) \in d.$$

Phương trình tham số của đường thẳng d : $x = \frac{5}{3} + t$; $y = -\frac{10}{3}$; $z = t$.

Câu 5.

1. Xét phương trình $\left(\frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{2}\right)^x + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^{2x} = \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^x$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\left(\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}\right)^x + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^{2x} = \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^x \Leftrightarrow \left(\sin \frac{\pi}{7}\right)^x + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^x = 1 (*)$$

Nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình.

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số:

$$f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{7}\right)^x + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^x \quad (C) \text{ và } g(x) = 1 \quad (D)$$

Dễ thấy $A(2; 1)$ là một giao điểm của (C) và (D).

Mặt khác, vì $0 < \sin \frac{\pi}{7} < 1$, $0 < \cos \frac{\pi}{7} < 1$ nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (C) và (D) có nhiều nhất một giao điểm. Suy ra $A(2; 1)$ là giao điểm duy nhất của (C) và (D).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 2$.

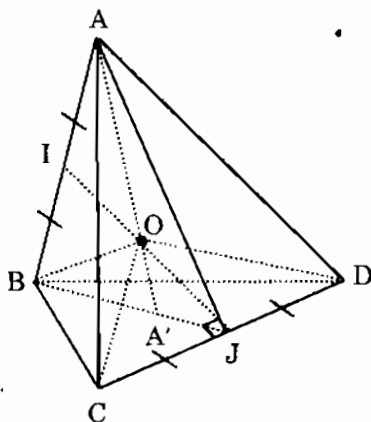
2. a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trọng tâm của tứ diện là trung điểm O của IJ .

Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau nên $AJ = BJ$. Do đó $\triangle AJB$ cân tại J ; Suy ra $IJ \perp AB$.

Tương tự: $IJ \perp CD$.

Như thế IJ là đường vuông góc chung của AB và CD đồng thời cũng là đường trung trực của hai đường thẳng này. Do đó $OA = OB$ và $OC = OD$ (1).

Hai tam giác vuông OIB và OJC bằng nhau.



Vì $OI = OJ$ và $IB = JC = \frac{a}{2}$, do vậy $OB = OC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OA = OB = OC = OD$.

Vậy điểm O là tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện $ABCD$.

Từ giả thiết suy ra tất cả các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau, nên các đường tròn ngoại tiếp của chúng cũng bằng nhau, do vậy khoảng cách từ O đến tất cả các mặt của tứ diện bằng nhau. Do đó O là tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện. Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện trùng nhau.

b) Ta có:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OA})^2 &= \frac{1}{16}((\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AD})^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}). \\ &= \frac{1}{16}[a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 + a^2 - b^2)]. \\ &= \frac{1}{16}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2). \end{aligned}$$

$$\text{Ta được } R = AO = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{4}.$$

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$:

$$S_{m/c} = 4\pi R^2 = \frac{\pi(a^2 + b^2 + c^2)}{2}.$$

ĐỀ 40

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = -x^4 + kx^2 - k + 1$, k là một tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $k = -1$.
2. Khi k thay đổi, chứng tỏ rằng đồ thị (C_k) của hàm số luôn đi qua hai điểm cố định. Gọi hai điểm cố định đó là A và B .
3. Tìm các giá trị của k để cho các tiếp tuyến của (C_k) tại A và B vuông góc với nhau.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \tan x = \frac{1}{2}$.
2. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 \sin x$.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình của đường tròn (T) đi qua hai điểm A(2; 1), B(5; 4) và tiếp xúc với đường thẳng $x - 2y + 5 = 0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 định bởi:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{-4}.$$

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau và vuông góc. Tính khoảng cách giữa chúng.
2. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Câu 5.

1. Giải bất phương trình $3^{\log x + 2} < 2^{\log x^2 - 5} - 2$.
2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và các mặt bên là các tam giác cân có góc đáy bằng φ .
 - a) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD theo a và φ .
 - b) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABCD theo a và φ .
 - c) Tính φ để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp S.ABCD trùng nhau.

Giải

Câu 1.

1. Khi $k = -1$, hàm số trở thành $y = -x^4 - x^2 + 2$.

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

b) Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 - 2x = -2x(2x^2 + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y' > 0$ khi $x < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

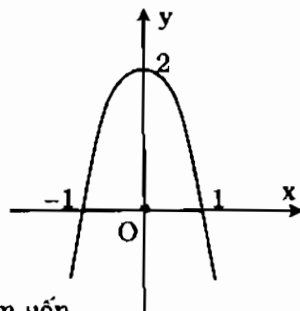
$y' < 0$ khi $x > 0$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- Cực trị: Hàm số chỉ có một cực đại, đạt tại điểm $x = 0$, $y_{CB} = 2$.

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	2 CB	$-\infty$



c) Đồ thị:

Ta có $y'' = -12x^2 - 2 < 0$, $\forall x$, đồ thị không có điểm uốn.

Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(-1; 0)$, $(1; 0)$ và nhận trục tung làm trục đối xứng.

2. Phương trình của hàm số có thể viết dưới dạng: $(x^2 - 1)k = x^4 + y - 1$.

Phương trình trên nghiệm đúng với mọi k khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^4 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ trên có hai nghiệm $(1; 0)$ và $(-1; 0)$.

Vậy đồ thị (C_k) luôn đi qua hai điểm cố định $A(1; 0)$ và $B(-1; 0)$.

3. Ta có $f'(x) = -4x^3 + 2kx$

Các tiếp tuyến của đồ thị tại $A(1; 0)$ và $B(-1; 0)$ có hệ số góc lần lượt là:

$$k_1 = f'(1) = -2(2 - k), k_2 = f'(-1) = 2(2 - k).$$

Hai tiếp tuyến của (C_k) vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow -4(2 - k)^2 = -1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2} \text{ hoặc } k = \frac{3}{2}.$$

Vậy nếu $k = \frac{5}{2}$ hoặc $k = \frac{3}{2}$ thì hai tiếp tuyến của (C_k) tại A và B vuông góc với nhau.

Câu 2.

1. Xét phương trình: $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \tan x = \frac{1}{2}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \tan x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos x) + \left(\sin 2x + \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) - 2 \tan x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos x) + (\sin 2x - \cos x) - 2 \tan x = 1.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x - 2 \tan x = 1 \quad (2).$$

Đặt $\tan x$, ta được phương trình:

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} - 2t = 1 \Leftrightarrow 1 - t^2 + 2t - 2t(1 + t^2) = 1 + t^2.$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 + 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}.$$

$$\bullet t = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

$$\bullet t = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + m\pi.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm: $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + m\pi$ ($k, m \in \mathbb{Z}$).

2. $y = f(x) = x^2 \sin x$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $h \neq 0$, ta có: $f(x + h) - f(x) = (x + h)^2 \sin(x + h) - x^2 \sin x$.

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 2xh + h^2)\sin(x + h) - x^2\sin x \\
&= x^2(\sin(x + h) - \sin x) + 2xh\sin(x + h) + h^2 + h^2\sin(x + h) \\
&= x^2 \cdot 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2} + 2xh\sin(x + h) + h^2\sin(x + h).
\end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + 2x\sin(x + h) + h\sin(x + h).$$

$$\text{Suy ra } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$

$$\text{Gọi } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx.$$

* Trường hợp $a^2 = b^2$:

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{2|a|} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{4|a|} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2|a|}.$$

* Trường hợp $a^2 \neq b^2$:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \Leftrightarrow t^2 = a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x$$

$$\text{Suy ra } \sin x \cos x dx = \frac{t dt}{b^2 - a^2}$$

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } t = |a| \text{ và khi } x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t = |b|$$

$$\text{Ta được: } I = \frac{1}{b^2 - a^2} \int_{|a|}^{|b|} dt = \frac{|b| - |a|}{b^2 - a^2} = \frac{1}{|a| + |b|}$$

Kết hợp hai trường hợp trên ta kết luận:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx = \frac{1}{|a| + |b|}.$$

2. Theo giả thiết cho $A(2; 1)$, $B(5; 4)$ và đường thẳng $x - 2y + 5 = 0$.

Gọi $I(a; b)$ là tâm và R là bán kính của (T) , Δ là đường thẳng $x - 2y + 5 = 0$.

Ta phải có điều kiện:

$$IA = IB = d(I, \Delta) = R$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad IA = IB &\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 5)^2 + (b - 4)^2 \\
&\Leftrightarrow a + b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = 6 - a.
\end{aligned}$$

$$\bullet IA = d(I, \Delta) \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \frac{|a-2b+5|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \sqrt{2a^2 - 14a + 29} = |3a - 7|$$

Bình phương hai vế và thu gọn ta được phương trình

$$a^2 - 28a + 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 24 \end{cases}$$

Nếu $a = 4$ thì $I(4; 2)$ và $R = \sqrt{5}$

Nếu $a = 24$ thì $I(24; -18)$ và $R = 13\sqrt{5}$

Vậy phương trình của đường tròn (T) là:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ hoặc } (x-24)^2 + (y+18)^2 = 845.$$

Câu 4. $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{-4}$

1. Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(3; 2; -1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(0; -4; 2)$ có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (1; -1; -4)$

Ta có: $[\vec{u}, \vec{v}] = (9; 9; 0)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; -6; 3)$.

Suy ra: $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = -81 \neq 0 \Rightarrow \Delta_1$ và Δ_2 chéo nhau.

Mặt khác $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$

Như thế Δ_1 và Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc.

Từ kết quả trên suy ra: $|[\vec{u}, \vec{v}]| = 9\sqrt{2}$ và $|[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{M_1M_2}| = |-81| = 81$.

Gọi d là khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 ta được $d = \frac{81}{9\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

2. Gọi (α) là mặt phẳng qua Δ_1 và vuông góc với Δ_2 , (β) là mặt phẳng qua Δ_2 và vuông góc với Δ_1 thì đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 là giao tuyến (D) của (α) và (β) .

* Mặt phẳng (α) qua $M_1(3; 2; -1)$ nhận $\vec{v}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$1(x-3) - 1(y-2) - 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 4z - 5 = 0$$

* Mặt phẳng (β) qua $M_2(0; -4; 2)$ nhận $\vec{u}$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình:

$$2(x-0) - 2(y+4) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 10 = 0$$

Các điểm nằm trên đường thẳng (D) có tọa độ nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0 \\ 2x - 2y + z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0; -5; 0) \in (D)$$

Đường thẳng (D) có vectơ chỉ phương $[\vec{u}, \vec{v}] = (9; 9; 0)$, cùng phương với $\vec{a} = (1; 1; 0)$.

Vậy phương trình đường vuông góc chung (D) của Δ_1 và Δ_2 là: $\begin{cases} x = t \\ y = -5 + t \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 5.

1. Xét bất phương trình $3^{\log x + 2} < 3^{\log x^2 - 5} - 2$

Điều kiện $x > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$243.3^{2\log x} - 9.3^{\log x} - 2 > 0.$$

Đặt $t = 3^{\log x}$ ($t > 0$), bất phương trình trở thành:

$$243t^2 - 9t - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -\frac{2}{27} \text{ (loại)} \\ t > \frac{1}{9} \end{cases}$$

Ta được $t > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{\log x} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log x > -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{100}$

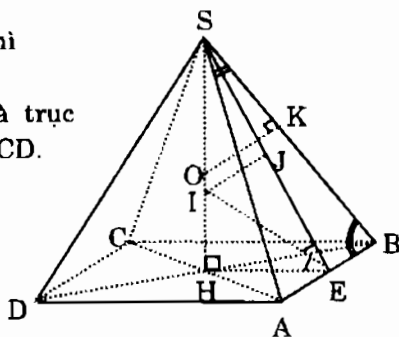
Vậy $x > \frac{1}{100}$.

2. a) Gọi H là giao điểm của AC và BD thì

SH là đường cao của hình chóp.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên SH là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi K là trung điểm của SB . Trong tam giác SHB , ta dựng đường trung trực của SB cắt SH tại điểm O . Ta được O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



Gọi E là trung điểm của AB. Suy ra $SE \perp AB$

Ta có: $SB = \frac{EB}{\cos \varphi} = \frac{a}{2 \cos \varphi}$; $SE = \frac{a}{2} \tan \varphi$.

Hai tam giác vuông SHB và SKO đồng dạng cho:

$$\frac{SO}{SB} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SO = \frac{SB.SK}{SH} = \frac{SB^2}{2SH}$$

Mặt khác ΔSHB vuông tại H cho:

$$SH^2 = SB^2 - HB^2 = \frac{a^2}{4\cos^2\varphi} - \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{4\cos^2\varphi} (1 - 2\cos^2\varphi)$$

$$SH = \frac{a\sqrt{1-2\cos^2\phi}}{2\cos\phi} \Rightarrow SO = \frac{a}{4\cos\phi\sqrt{1-2\cos^2\phi}}$$

Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là

$$R = \frac{a}{4\cos\varphi\sqrt{1-2\cos^2\varphi}}.$$

- b) Nhận thấy góc $\widehat{SEH}$ là góc phẳng tạo bởi hai mặt (SAB) và (ABCD).

Trong $\triangle SHE$ kẻ phân giác góc $\widehat{SEH}$ cắt SH tại điểm I. Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên SE.

Ta có $IJ \perp SE$, ngoài ra $AB \perp SH$ và $AB \perp HE$ nên $AB \perp (SHE)$.

Suy ra $AB \perp IJ$

Như thế $IJ \perp (SAB)$, tức là độ dài đoạn IJ là khoảng cách từ I đến mp(SAB)

Mặt khác I nằm trên phân giác của góc $\widehat{SEH}$ nên $IH = IJ$. Do đó điểm I là điểm cách đều hai mặt $(ABCD)$ và (SAB) . Suy ra I cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Vậy I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Hai tam giác vuông SJI và SHE đồng dạng cho:

$$\frac{IJ}{HE} = \frac{SI}{SE} \Rightarrow IJ \cdot SE = SI \cdot HE = (SH - r) \cdot HE$$

$$\text{Hay: } r \frac{a}{2} \tan \varphi = \left(\frac{a\sqrt{1-2\cos^2\varphi}}{2\cos\varphi} - r \right) \cdot \frac{a}{2}$$

$$\text{Do đó: } r(1 + \tan\varphi) = \frac{a\sqrt{1-2\cos^2\varphi}}{2\cos\varphi} \Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{1-2\cos^2\varphi}}{2(\sin\varphi + \cos\varphi)}$$

$$\text{Vậy bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp là } r = \frac{a\sqrt{1-2\cos^2\varphi}}{2(\sin\varphi + \cos\varphi)}.$$

c) Xác định φ để O và I trùng nhau.

$$\text{Ta có } O \equiv I \Leftrightarrow SO = SH - IH \Leftrightarrow R = h - r$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4\cos\varphi\sqrt{1-2\cos^2\varphi}} = \frac{a\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{2\cos\varphi} - \frac{a\sqrt{1-2\cos^2\varphi}}{2(\sin\varphi + \cos\varphi)} \quad (*)$$

Gọi $\alpha = 90^\circ - \varphi$ thì $(*)$ trở thành:

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}} = \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\sin\alpha} - \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha(2\cos 2\alpha - 1)$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = 2 \cdot \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} - 1 \Leftrightarrow \tan^3\alpha + 2\tan^2\alpha + \tan\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan\alpha + 1)(\tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = -1, \tan\alpha = -1 + \sqrt{2}, \tan\alpha = -1 - \sqrt{2}$$

Chỉ có $\tan\alpha = \sqrt{2} - 1$ là thích hợp. Suy ra $\tan 2\alpha = 1$

Suy ra $2\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \alpha = 22^\circ 30'$. Suy ra $\varphi = 67^\circ 30'$

Vậy khi $\varphi = 67^\circ 30'$ thì tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp của hình chóp trùng nhau.

ĐỀ 41

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$.
2. Tìm phương trình các tiếp tuyến của đồ thị (C) kẻ từ điểm $A(0; 1)$.

Câu 2.

1. a) Với a là một số thực bất kì, hãy chứng minh đẳng thức

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a.$$

$$\text{b) Chứng minh rằng } \frac{10}{60} < \sin 10^\circ < \frac{11}{60}.$$

2. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số

$$y = f(x) = x^2 e^x.$$

Câu 3.

$$1. \text{ Tính tích phân } \int_1^4 \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{4+x}{x}} dx.$$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $B(-1; 8)$, $C(-2; 1)$ và đỉnh A nằm trên đường thẳng $x - 6y = 0$. Xác định tọa độ của A biết rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC có bán kính $R = 5$.

- Câu 4.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 định bởi:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

1. Xét vị trí tương đối giữa Δ_1 và Δ_2 .
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Câu 5.

1. Giải bất phương trình $3^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} \leq 162$.
2. Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh đáy bằng a và mặt bên hợp với đáy một góc α .
 - a) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a và α .
 - b) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp theo a và α .
 - c) Tìm α để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của hình chóp trùng nhau.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số (độc giả tự giải).
2. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0; 1)$ với hệ số góc k có dạng:

$$y = kx + 1$$

Đường thẳng Δ và đồ thị (C) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2 + 1 = kx + 1 & (1) \\ 4x^3 - 6x = k & (2) \end{cases}$$

Khử k giữa (1) và (2) ta được phương trình: $x^4 - x^2 = 0$ (*)

Phương trình (*) có ba nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$

Suy ra các giá trị của k tương ứng là: $k_1 = 0, k_2 = -2, k_3 = 2$

Vậy có ba tiếp tuyến qua $A(0; 1)$ với phương trình là:

$$y = 1, y = -2x + 1, y = 2x + 1.$$

Câu 2.

1. a) $\sin 3a = \sin(2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a$

$$= 2\sin a \cos^2 a + (1 - 2\sin^2 a) \sin a.$$

$$= 2\sin a(1 - \sin^2 a) + (1 - 2\sin^2 a) \sin a = 3\sin a - 4\sin^3 a.$$

Vậy $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.

b) Ta có $\sin 30^\circ = \sin(3 \cdot 10^\circ) = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$

$$\text{Hay } \frac{1}{2} = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ \Leftrightarrow 8\sin^3 10^\circ - 6\sin 10^\circ + 1 = 0$$

Như vậy $\sin 10^\circ$ là một nghiệm của phương trình

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

Xét hàm số $y = f(x) = 8x^3 - 6x + 1$

Đạo hàm $y' = 6(4x^2 - 1), y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$				
y'		+	0	-	0	+			
y			3		1		-1		$+\infty$

Dựa vào bảng ta dễ thấy phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó chỉ có một nghiệm x_0 thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Mặt khác, vì $0^\circ < 10^\circ < 30^\circ$ nên $0 < \sin 10^\circ < \frac{1}{2}$. Do đó nghiệm x_0 chính là $\sin 10^\circ$.

$$\text{Ta có } f\left(\frac{10}{60}\right) = \frac{1}{27} > 0, f\left(\frac{11}{60}\right) = -\frac{1369}{27000} < 0 \Rightarrow f\left(\frac{10}{60}\right) \cdot f\left(\frac{11}{60}\right) < 0$$

Hơn nữa $\left(\frac{10}{60}; \frac{11}{60}\right) \subset \left(0; \frac{1}{2}\right)$, nên $x_0 = \sin 10^\circ \in \left(\frac{10}{60}; \frac{11}{60}\right)$.

Vậy $\frac{10}{60} < \sin 10^\circ < \frac{11}{60}$ (đpcm).

2. $y = f(x) = x^2 e^x$.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Với mọi $h \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 e^{x+h} - x^2 e^x \\ &= (x^2 + 2xh + h^2) e^{x+h} - x^2 e^x \\ &= x^2 (e^{x+h} - e^x) + 2xh e^{x+h} + h^2 e^{x+h} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^2 \cdot e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} + 2x e^{x+h} + h e^{x+h}$$

Suy ra $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^2 e^x + 2x e^x$

Vậy $f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x$.

Câu 3.

1. Tính $\int_1^4 \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{4+x}{x}} dx$

Đặt $t = \sqrt{\frac{4+x}{x}} \Leftrightarrow t^2 = \frac{4+x}{x} \Rightarrow 2t dt = -\frac{4}{x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{x^2} dx = -\frac{t dt}{2}$

Khi $x = 1$ thì $t = \sqrt{5}$ và khi $x = 4$ thì $t = \sqrt{2}$. Ta được:

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{4+x}{x}} dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

2. Phương trình của đường tròn tâm B, bán kính $R = 5$:

$$(x+1)^2 + (y-8)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 16y + 40 = 0 \quad (T_1)$$

Phương trình của đường tròn tâm C, bán kính $R = 5$:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \quad (T_2)$$

Gọi I là tâm của đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ABC, thì $BI = CI = R = 5$, nên I nằm trên hai đường tròn (T_1) và (T_2) . Do đó, tọa độ của I nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 16y + 40 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được:

$$x = -5, y = 5 \text{ hoặc } x = 2, y = 4$$

$$\bullet x = -5, y = 5 \Rightarrow I(-5; 5).$$

Ta phải có điều kiện $IA = 5$ với $A \in \Delta$ (Δ là đường thẳng $x - 6y = 0$)

Điều này không xảy ra vì:

$$d(I, \Delta) = \frac{|-5 - 6.5|}{\sqrt{37}} = \frac{35}{\sqrt{37}} > 5$$

$$\bullet x = 2, y = 4 \Rightarrow I(2; 4).$$

Điểm A nằm trên đường tròn tâm I với bán kính $R = 5$, có phương trình:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$$

Tọa độ điểm A nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \\ x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, y = 1 \\ x = -\frac{30}{37}, y = -\frac{5}{37} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(6; 1) \text{ hoặc } A\left(-\frac{30}{37}; -\frac{5}{37}\right)$$

Câu 4. $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

1. Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(1; 2; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 2)$ và đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(0; 1; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (4; -2; 4)$.
Để thấy $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ cùng phương. Mặt khác ta thấy điểm $M_1 \in \Delta_1$ nhưng M_1 không nằm trên Δ_2 . Vậy hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

2. Vì $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ nên khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 bằng khoảng cách từ M_2 đến Δ_1 .

$$\text{Ta có } \vec{M_1M_2} = (-1; -1; -1) \Rightarrow [\vec{M_1M_2}, \vec{u}] = (-3; 0; 3)$$

$$\text{Suy ra } [\vec{M_1M_2}, \vec{u}] = 3\sqrt{2}, |\vec{u}| = 3.$$

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng,

$$\text{ta được khoảng cách giữa } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ là } d = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$

Câu 5.

1. Xét bất phương trình $3^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} \leq 162$

Điều kiện: $x > 0$

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} \leq 162 \Leftrightarrow 2. x^{\log_3 x} \leq 162 \Leftrightarrow x^{\log_3 x} \leq 81$$

Lấy lôgarit hai vế theo cơ số 3, ta được:

$$(\log_3 x)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq \log_3 x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq x \leq 9$$

$$\text{Vậy đáp số là } \frac{1}{9} \leq x \leq 9.$$

2. a) Gọi H là tâm lục giác đều ABCDEF thì SH là đường cao của hình chóp.
Vì S.ABCDEF là hình chóp đều nên SH là trục của đường tròn ngoại tiếp ABCDEF.

Gọi K là trung điểm của SA, dựng mặt trung trực của SA cắt SH tại điểm O. Ta được điểm O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCDEF.

Gọi J là trung điểm của AB. Suy ra $SJ \perp AB$ và $\widehat{SJH} = \alpha$.

Hai tam giác vuông SHA và SKO đồng dạng cho:

$$\frac{SO}{SA} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SO = \frac{SA \cdot SK}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}$$

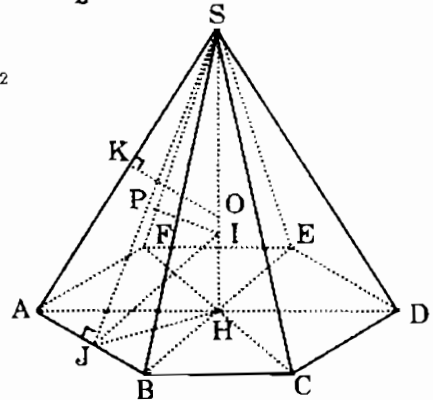
Từ $\triangle SHJ$ vuông tại H ta có $SH = SJ \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$

Tam giác SHA vuông tại H cho

$$SA^2 = SH^2 + HA^2 = \frac{3a^2}{4} \tan^2 \alpha + a^2$$

$$= \frac{a^2}{4} (3 \tan^2 \alpha + 4)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } SO &= \frac{\frac{a^2}{4} (3 \tan^2 \alpha + 4)}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha} \\ &= \frac{a\sqrt{3}(3 \tan^2 \alpha + 4)}{12 \tan \alpha} \end{aligned}$$



Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCDEF là

$$R = \frac{a\sqrt{3}(3 \tan^2 \alpha + 4)}{12 \tan \alpha}.$$

- b) Nhận thấy góc $\widehat{SJH}$ là góc phẳng tạo bởi hai mặt (SAB) và (ABCDEF). Trong $\triangle SHJ$ kẻ phân giác góc $\widehat{SJH}$ cắt SH tại điểm I. Gọi P là hình chiếu vuông góc của I trên SJ.

Ta có $IP \perp SJ$, ngoài ra $AB \perp SH$ và $AB \perp HJ$ nên $AB \perp (SHJ)$. Suy ra $AB \perp IP$. Như thế $IP \perp (SAB)$, tức là độ dài đoạn IK là khoảng cách từ I đến mp(SAB).

Mặt khác I nằm trên phân giác của góc $\widehat{SJH}$ nên $IH = IP$. Do đó điểm I là điểm cách đều hai mặt (ABCDEF) và (SAB). Suy ra I cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Vậy I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABCDEF.

Từ tam giác IHJ vuông tại H ta có $IH = HJ \tan \widehat{IJH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$.

- c) Xác định α để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau:
Tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau khi và chỉ khi:

$$R + r = SH \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}(3 \tan^2 \alpha + 4)}{12 \tan \alpha} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \tan^2 \alpha + 4}{6 \tan \alpha} + \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \alpha \Leftrightarrow 3 \tan^2 \alpha - 6 \tan \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2} - 4 = 0$$

Đặt $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ ta được phương trình $3\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 - 6\frac{2t}{1-t^2} - 4 = 0$

Hay $2t^4 + 2t^2 - 1 = 0$. Giải được $t^2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$ ($t > 0$)

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của hình chóp S.ABCDEF trùng nhau khi góc α được xác định bởi $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$.

ĐỀ 42

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số
2. Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0; \pi]$.

Câu 2.

1. Giải phương trình $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x) + 1$.
2. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2a - 2 \\ x^2 + y^2 = -2a^2 + 4a + 2 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tích số xy.

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_2^9 (x+1) \cdot \cos e^{x^2-2x-2} \cdot dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 10 = 0$. Viết phương trình của đường tròn có bán kính $R = 5$ và tiếp xúc với Δ tại điểm $A(2; 4)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình như sau:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 6 + 4t \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng Δ_1 và Δ_2 là hai đường thẳng chéo nhau. Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 .
2. Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 .
3. Đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 cắt Δ_1 tại điểm A và cắt Δ_2 tại điểm B. Viết phương trình của mặt cầu đường kính AB.

Câu 5.

1. Giải hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} 2^{x-2y} + 5 \cdot 2^{x-y-1} \leq 2 \\ 2x + 3y \geq 1 - \log_2 5 \end{cases}$$

2. Hình chóp S.ABC có đáy ABC là một tam giác cân. $AB = AC = a$, mặt bên SBC vuông góc với đáy. cho biết $SA = SB = a$.

a) Chứng minh rằng SBC là một tam giác vuông.

b) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = 8x^4 - 9x^2 + 1$ (độc giả tự giải)

2. Xét phương trình $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0; \pi]$ (1)

Đặt $t = \cos x$, phương trình (1) trở thành:

$$8t^4 - 9t^2 + m = 0 \quad (2)$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [-1; 1]$, giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ (3)

Gọi (C_1) : $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ với $t \in [-1; 1]$

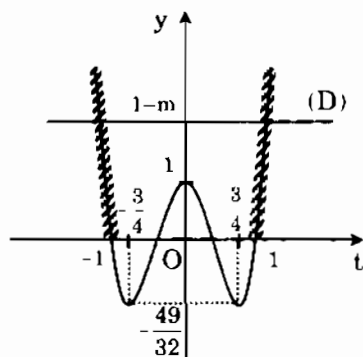
và (D) : $y = 1 - m$.

Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (D) .

Chú ý rằng (C_1) giống như đồ thị (C) trong miền $-1 \leq t \leq 1$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

- $m > \frac{81}{32}$ (tức là $1 - m < -\frac{49}{32}$): Phương trình đã cho vô nghiệm.
- $m = \frac{81}{32}$ (tức là $1 - m = -\frac{49}{32}$): Phương trình đã cho có hai nghiệm.
- $1 \leq m \leq \frac{81}{32}$ (tức là $-\frac{49}{32} < 1 - m \leq 0$): Phương trình đã cho có bốn nghiệm.
- $0 < m < 1$ (tức là $0 < 1 - m < 1$): Phương trình đã cho có 2 nghiệm.
- $m = 0$ (tức là $1 - m = 1$): Phương trình đã cho có 1 nghiệm.
- $m < 0$ (tức là $1 - m > 1$): Phương trình đã cho vô nghiệm.



Câu 2.

1. Xét phương trình $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x) + 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - ((\cos x + \sin x)^2 - 1) = 2(\sin x + \cos x) + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x)^2 = 2(\sin x + \cos x) + 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)[2(\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x) - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - 3\sin x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 & (2) \\ \cos x - 3\sin x - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\bullet (3) \Leftrightarrow \cos x - 3\sin x = 2 \quad (4)$$

Chia hai vế của phương trình (4) cho $\sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$, ta được phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \cos x - \frac{3}{\sqrt{10}} \sin x = \frac{2}{\sqrt{10}} \quad (5)$$

Đặt $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ và $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, khi đó:

$$(5) \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{2}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow x = \alpha \pm \arccos \frac{2}{\sqrt{10}} + m2\pi.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \alpha \pm \arccos \frac{2}{\sqrt{10}} + m2\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

2. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 2a - 2 \\ x^2 + y^2 = -2a^2 + 4a + 2 \end{cases}$$

Trước hết ta phải có điều kiện:

$$-2a^2 + 4a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2} \quad (1)$$

Ta có
$$xy = \frac{1}{2} [(x + y)^2 - (x^2 + y^2)] = 3a^2 - 6a + 1.$$

Suy ra x và y là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2(a - 1)t + 3a^2 - 6a + 1 = 0$$

Điều kiện để phương trình trên có nghiệm là:

$$\Delta' = (a - 1)^2 - (3a^2 - 6a + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -2a^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$$

(Thỏa mãn điều kiện (1)).

Gọi $xy = f(a) = 3a^2 - 6a + 1.$

Như thế ta sẽ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(a)$ trên đoạn $[0; 2]$

Hàm số $f(a)$ là hàm số bậc hai, đạt cực tiểu tại điểm $a = 1$, là điểm chính giữa của đoạn $[0; 2]$.

Từ đó ta dễ dàng suy ra được:

$$\max(xy) = \max f(a) = f(0) = f(2) = 1$$

$$\min(xy) = \min f(a) = f(1) = -2.$$

Câu 3.

1. Gọi $I = \int_{-2}^0 (x+1) \cdot \cos e^{x^2-2x+2} dx = \int_{-2}^0 (x+1) \cdot \cos e^{(x+1)^2-1} dx$

Đặt $t = (x+1)^2 \Rightarrow dt = 2(x+1)dx.$

Khi $x = -2$ thì $t = 1$ và khi $x = 0$ thì $t = 1$. Ta được:

$$I = \frac{1}{2} \int_1^1 \cos e^{t-1} \cdot dt = 0$$

Vậy
$$\int_{-2}^0 (x+1) \cdot \cos e^{x^2-2x+2} \cdot dx = 0.$$

2. Gọi đường tròn cần tìm là (T), tâm là I.

Từ giả thiết suy ra, điểm I nằm trên đường thẳng (D) vuông góc với Δ tại A, đồng thời cũng nằm trên đường tròn tâm A với bán kính $R = 5$.

Đường thẳng (D) vuông góc Δ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 3)$.

Phương trình của (D) là:

$$4(x - 2) + 3(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 20 = 0.$$

Phương trình của đường tròn tâm A bán kính $R = 5$:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$$

Tọa độ của điểm I nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \\ 3x - 4y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, y = 7 \\ x = -2, y = 1 \end{cases}$$

• $x = 6, y = 7$: Suy ra (T) có tâm I(6; 7) và bán kính $R = 5$. Phương trình của (T) là $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 25$.

• $x = -2, y = 1$: Suy ra (T) có tâm I(-2; 1) và bán kính $R = 5$. Phương trình của (T) là $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Vậy phương trình của đường tròn thỏa mãn đề bài là:

$$(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 25 \text{ hoặc } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Câu 4. $\Delta_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \quad (1), \Delta_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad (2)$

1. Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0; 2; 6)$ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 1; 4)$ và đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(3; 5; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (2; -1; 2)$

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (6; 6; -3)$, $\vec{M}_1\vec{M}_2 = (3; 3; -6)$

Suy ra $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{M}_1\vec{M}_2 = 54 \neq 0$.

Vậy hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

Từ các kết quả trên ta được: $|[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{M}_1\vec{M}_2| = 54$ và $|[\vec{a}, \vec{b}]| = 9$.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng,

ta được khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 là $d = \frac{54}{9} = 6$.

2. Gọi (D) là đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 . Do (D) vuông góc với Δ_1 và Δ_2 nên (D) có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}] = (6; 6; -3)$, cùng phương với $\vec{v} = (2; 2; -1)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa (D) và Δ_1 và (β) là mặt phẳng chứa (D) và Δ_2 thì (D) là giao tuyến của (α) và (β) .

* (α) qua điểm $M_1(0; 2; 6)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\vec{v}, \vec{a}] = (9; -9; 0)$, cùng phương vectơ $\vec{c} = (1; -1; 0)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$1 \cdot x - 1 \cdot (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$$

* (β) qua điểm $M_2(3; 5; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\vec{v}, \vec{b}] = (3; -6; -6)$, cùng phương với vectơ $\vec{d} = (1; -2; -2)$. Phương trình của mặt phẳng (β) là:

$$1.(x-3) - 2(y-5) - 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 7 = 0.$$

Các điểm nằm trên (D) có tọa độ nghiệm đúng hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - 2y - 2z + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(3; 5; 0) \in (D).$$

Đường thẳng (D) có vectơ chỉ phương $[\vec{a}, \vec{b}] = (6; 6; -3)$, cùng phương với $\vec{w} = (2; 2; -1)$

$$\text{Phương trình tham số của (D): } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = -t \end{cases} (3)$$

3. * Giải hệ (1) và (3) ta được $x = -1, y = 1, z = 2$. Suy ra $A(-1; 1; 2)$

* Giải hệ (2) và (3) ta được $x = 3, y = 5, z = 0$. Suy ra $B(3; 5; 0)$

Mặt cầu (S) đường kính AB có tâm là trung điểm $I(1; 3; 1)$ của AB và có bán

kinh là $R = \frac{AB}{2} = 3$. Vậy phương trình của mặt cầu (S) đường kính AB là:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

Câu 5.

$$1. \text{ Xét hệ bất phương trình } \begin{cases} 2^{x+2y} + 5 \cdot 2^{x+y-1} \leq 2 \\ 2x + 3y \geq 1 - \log_2 5 \end{cases}$$

Đặt $u = 2^{x+2y}, v = 5 \cdot 2^{x+y-1}$ ($u > 0, v > 0$). Ta có:

$$u \cdot v = 2^{x+2y} \cdot 5 \cdot 2^{x+y-1} = 5 \cdot 2^{2x+3y-1} \geq 5 \cdot 2^{-\log_2 5} = 1$$

Do đó $u + v \geq 2\sqrt{uv} = 2$ (1) (áp dụng bất đẳng thức Côsi)

Mà theo giả thiết: $2^{x+2y} + 5 \cdot 2^{x+y-1} \leq 2 \Rightarrow u + v \leq 2$ (2)

Kết hợp (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned} u + v = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2y} = 1 \\ 5 \cdot 2^{x+y-1} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - 1 = -\log_2 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 5 - 1 \\ x = 2(1 - \log_2 5) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy: $x = 2(1 - \log_2 5)$ và $y = \log_2 5 - 1$.

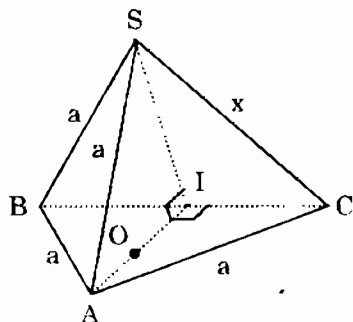
2. a) Gọi I là trung điểm của BC. Tam giác ABC cân tại A nên $AI \perp BC$.

Mà $(ABC) \perp (SBC) \rightarrow AI \perp (SBC)$. Suy ra $AI \perp SI$

Do đó $\triangle SIA$ vuông tại I.

Hai tam giác vuông SIA và BIA có $SA = AB = a$, IA là cạnh chung nên chúng bằng nhau. Do đó $IB = CI = IS$.

Vậy tam giác SBC vuông tại S.



- b) Tam giác SBC vuông tại S nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔSBC . Mặt khác $AI \perp (SBC)$ nên tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC nằm trên AI. Điểm O cách đều các điểm A, B, C nên O cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC .

Như vậy bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cũng là bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Từ tam giác SBC vuông tại S ta có:

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AI} = \frac{a^2}{2AI}$$

$$\text{Mà } AI^2 = SA^2 - SI^2 = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}$$

$$\Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \quad (0 < x < a\sqrt{3})$$

$$\text{Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là } R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}.$$

ĐỀ 43

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m$, gọi đồ thị của hàm số là (C_m) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 5$.
2. Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt, tạo thành ba đoạn thẳng liên tiếp có độ dài bằng nhau.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x}$.
2. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ (m+1)x + my - 9 = 0 \end{cases}$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \frac{\sin x + 8\cos x + 12}{2\sin x + 3\cos x + 6} dx$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình của đường tròn (C) đi qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với hai đường thẳng $x - 2y + 8 = 0$ và $x - 2y - 2 = 0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(1; 6; 0)$ và đường thẳng Δ có phương trình tham số:

$$x = 5 + 2t, y = -3 + t, z = 1 + 5t.$$

- Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua điểm I .
- Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với Δ .

Câu 5.

- Cho phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^{\ln x} + (3 - 2\sqrt{2})^{\ln x} = a$.
 - Giải phương trình khi $a = 6$.
 - Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm.
- Cho ba tia S_x, S_y, S_z không đồng phẳng với $\widehat{xSy} = 120^\circ, \widehat{ySz} = 60^\circ$ và $\widehat{zOx} = 90^\circ$. Trên các tia S_x, S_y, S_z lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho $SA = SB = SC = a$.
 - Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.
 - Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện $SABC$.
 - Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

Giải

Câu 1.

- Khi $m = 5$: phương trình của hàm số trở thành $y = x^4 - 6x^2 + 5$ (độc giả tự giải).
- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) với trục hoành:

$$x^4 - (m+1)x^2 + m = 0 \quad (1)$$

Đặt $X = x^2$ ($X \geq 0$), ta được phương trình:

$$X^2 - (m+1)X + m = 0 \quad (2)$$

Điều kiện (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là phương trình (2) có nghiệm phân biệt dương, nghĩa là:

$$\begin{cases} \Delta = (m-1)^2 > 0 \\ P = m > 0 \\ S = m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \end{cases}$$

Trong điều kiện đó phương trình (2) có hai nghiệm $X_1 = 1, X_2 = m$

Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{m}, x_4 = \sqrt{m}$$

Như vậy đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là:

$$A(-\sqrt{m}; 0), B(-1; 0), C(1; 0), D(\sqrt{m}; 0)$$

* $m > 1$: Các điểm trên được xếp theo thứ tự A, B, C, D .

Ta có $AB = CD = \sqrt{m} - 1, BC = 2$.

Ba đoạn thẳng này bằng nhau khi:

$$\sqrt{m} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m} = 3 \Leftrightarrow m = 9$$

* $0 < m < 1$: Các điểm trên được xếp theo thứ tự B, A, D, C .

Ta có $AB = CD = 1 - \sqrt{m}$, $AD = 2\sqrt{m}$

Ba đoạn thẳng này bằng nhau khi:

$$1 - \sqrt{m} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow \sqrt{m} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{9}.$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn đề bài là $m = \frac{1}{9}$, $m = 9$.

Câu 2.

1. Xét phương trình $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x}$ (1)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2}, x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2}, x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Để ý rằng $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 2x - 1}{1 + \tan 2x} \cdot \frac{\tan 2x + 1}{1 - \tan 2x} = -1$

Do đó (1) $\Leftrightarrow -1 = \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x} \Leftrightarrow \cot x - \tan x = 4\cos^2 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} = 4 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 2x} \Leftrightarrow \frac{2}{\tan 2x} = \frac{4}{1 + \tan^2 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\tan 2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + m\frac{\pi}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ (m+1)x + my - 9 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Do đó phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C) tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Phương trình $(m+1)x + my - 9 = 0$ là phương trình của một đường thẳng, gọi đường thẳng này là Δ . Như vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi Δ và (C) có điểm chung, tức là:

$$d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|(m+1) \cdot 1 + 2 \cdot m - 9|}{\sqrt{(m+1)^2 + m^2}} \leq \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |3m - 8| \leq \sqrt{5} \sqrt{2m^2 + 2m + 1}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 48m + 64 < 10m^2 + 10m + 5$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 58m - 59 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -59 \text{ hoặc } m \geq 1$$

Câu 3.

1. Tính $\int_0^{\pi} \frac{\sin x + 8\cos x + 12}{2\sin x + 3\cos x + 6} dx$

Để ý rằng $(2\sin x + 3\cos x + 6)' = 2\cos x - 3\sin x$

Ta có thể viết:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + 8\cos x + 12}{2\sin x + 3\cos x + 6} &= \frac{2(2\sin x + 3\cos x + 6) + (2\cos x - 3\sin x)}{2\sin x + 3\cos x + 6} \\ &= 2 + \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \int_0^{\pi} \frac{\sin x + 8\cos x + 12}{2\sin x + 3\cos x + 6} dx &= 2 \int_0^{\pi} dx + \int_0^{\pi} \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x + 6} dx \\ &= \pi + \ln(2\sin x + 3\cos x + 6) \Big|_0^{\pi} = \pi + \ln \frac{8}{9} \end{aligned}$$

2. Gọi $I(a; b)$ là tâm và R là bán kính của (C) , và gọi

$$\Delta_1: x - 2y + 8 = 0, \Delta_2: x - 2y - 2 = 0$$

Theo yêu cầu của bài toán, ta phải có điều kiện.

$$IA = d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) = R.$$

$$\bullet d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|a - 2b + 8|}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2b - 2|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow a = 2b - 3 \quad (1)$$

$$\bullet OA = d(I, \Delta_1) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|a - 2b + 8|}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) = (a - 2b + 8)^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab - 16a + b^2 + 32b - 64 = 0 \quad (2)$$

Thế (1) và (2) và thu gọn, ta được:

$$5b^2 - 12b + 4 = 0 \quad \begin{cases} b = 2 \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\bullet b = 2: \text{ Suy ra } I(1; 2) \text{ và } R = \sqrt{5}$$

$$\bullet b = \frac{2}{5}: \text{ Suy ra } I\left(\frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right) \text{ và } R = \sqrt{5}$$

Vậy phương trình của đường tròn thỏa mãn đề bài là:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ hoặc } \left(x + \frac{11}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = 5.$$

Câu 4.

1. Từ giả thiết suy ra Δ đi qua điểm $M(5; -3; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 5)$

Gọi M_1 là điểm đối xứng của M_0 qua điểm $I(1; 6; 0)$, ta được $M_1(-3; 15; -1)$. Đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua điểm I đi qua M_1 và nhận $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 15 + t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

2. Do mặt cầu (S) tiếp xúc với Δ nên có bán kính R là khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ .

Ta có: $\vec{IM}_0 = (4; -9; 1)$. Do đó $[\vec{IM}_0, \vec{u}] = (46; 18; -22)$.

Suy ra $|\vec{IM}_0, \vec{u}| = \sqrt{2924}$, $|\vec{u}| = \sqrt{30}$

Bán kính của mặt cầu (S): $R = \frac{\sqrt{2924}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{1462}{15}}$

Phương trình của mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 + z^2 = \frac{1462}{15}$.

Câu 5.

1. Xét cho phương trình $(3 + 2\sqrt{2})^{\ln x} + (3 - 2\sqrt{2})^{\ln x} = a$

a) $a = 6 \Rightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\ln x} + (3 - 2\sqrt{2})^{\ln x} = 6 \quad (1)$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\ln x} + \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^{\ln x}} = 6$

Đặt $t = (3 + 2\sqrt{2})^{\ln x}$ ($t > 0$), phương trình trở thành:

$$t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

- $t = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\ln x} = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.
- $t = 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\ln x} = 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = e$, $x = \frac{1}{e}$.

- b) Bằng cách biến đổi như trên và đặt $t = (3 + 2\sqrt{2})^{\ln x}$ ($t > 0$), ta được phương trình:

$$t^2 - at + 1 = 0 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm là:

$$\Delta = a^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2 \\ a \geq 2 \end{cases}$$

Với điều kiện đó thì (2) có nghiệm t_1, t_2 ($t_1 \leq t_2$)

- $a \leq -2$: Suy ra $P = t_1 \cdot t_2 = 1 > 0$ và $S = t_1 + t_2 = a < 0$. Do đó $t_1 < 0$ và $t_2 < 0$ (loại)

Trường hợp này phương trình đã cho vô nghiệm.

- $a \geq 2$: Suy ra $P = t_1 \cdot t_2 = 1 > 0$ và $S = t_1 + t_2 = a > 0$. Do đó $t_1 > 0$ và $t_2 > 0$. Trường hợp này phương trình đã cho có nghiệm.
- Vậy nếu $a \geq 2$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

2. a) Áp dụng định lí hàm số cosin trong $\triangle SAB$:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos 120^\circ$$

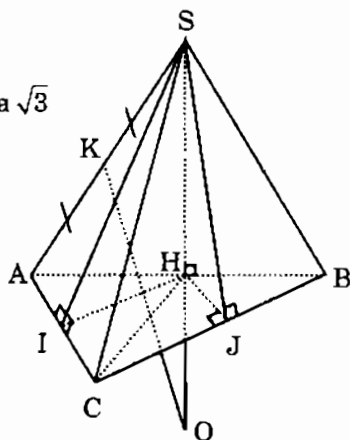
$$AB^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \left(-\frac{1}{2} \right) = 3a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$$

Tam giác SBC đều nên $BC = a$. Tam giác SAC vuông cân tại S nên $AC = a\sqrt{2}$.

Suy ra $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Vậy tam giác ABC vuông tại C .

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABC).

Do $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$, do đó H là tâm của $\triangle ABC$. Mà $\triangle ABC$ vuông tại C nên H là trung điểm của AB .



Gọi r là bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$ thì ta có $r = \frac{3V}{S_{tp}}$.

- Tính V : $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

- Tính S_{tp} : $S_{tp} = S_{ABC} + S_{SAC} + S_{SBC} + S_{SAB}$

$$= \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{a\sqrt{2}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}.$$

c) Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và K là trung điểm của SA . Từ câu b) suy ra SH là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ nên $O \in SH$. Vì $OA = OB$ nên O nằm trên trung trực của SA . Hai tam giác vuông SKO và SHA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{SO}{SA} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SO = \frac{SK \cdot SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a}{2}} = a \quad (SH = \frac{a}{2})$$

Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = a$.

ĐỀ 44

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (L) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
2. Xác định giá trị của m để đường thẳng $\Delta: y = m$ cắt đồ thị (L) tại bốn điểm phân biệt.
3. Trong điều kiện của câu 2, gọi A, B, C, D là các giao điểm của Δ với (L) (viết theo thứ tự từ trái sang phải). Hãy xác định giá trị của m để độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CD là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 2.

1. Giải phương trình $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$.
2. Chứng minh rằng với mọi m, hệ phương trình sau luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \\ mx + (1 - m)y - 3 = 0 \end{cases}$$

Câu 3.

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác là

$$x - 4 = 0, 3x - 4y + 36 = 0, 4x + 3y + 23 = 0$$
 Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + t \\ z = -15 - 2t \end{cases}$$

1. Viết phương trình của mặt cầu (S) có tâm I(2; 3; -1) và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$.
2. Viết phương trình của mặt phẳng (P) chứa Δ và song song với trục Oz.

Câu 5.

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3^{\log x} = 4^{\log y} \\ (4x)^{\log 4} = (3y)^{\log 3} \end{cases}$$
2. Cho ba mặt cầu $(C_1), (C_2), (C_3)$ tâm O_1, O_2, O_3 và có bán kính lần lượt là R_1, R_2, R_3 , chúng tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. Qua mỗi tiếp điểm của từng cặp mặt cầu ta dựng mặt phẳng tiếp xúc chung của mỗi cặp mặt cầu ấy.

- a) Chứng minh rằng ba mặt phẳng tiếp xúc chung đó cùng đi qua một điểm I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $O_1O_2O_3$.
- b) Tính khoảng cách từ I tới tiếp điểm của mỗi cặp mặt cầu theo R_1, R_2, R_3 .

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ (độc giả tự giải).
2. Dựa vào đồ thị ta dễ thấy, khi $-4 < m < -3$ thì đường thẳng Δ cắt đồ thị (L) tại bốn điểm phân biệt.
3. Phương trình hoành độ giao điểm của (L) và Δ :

$$x^4 - 2x^2 - 3 = m$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3 - m = 0 \quad (1)$$

Đặt $X = x^2$ ($X \geq 0$), ta được phương trình

$$X^2 - 2X - 3 - m = 0 \quad (2).$$

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là hoành độ của các giao điểm A, B, C, D thì x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình (1).

Với điều kiện $-4 < m < -3$ thì phương trình (2) có hai nghiệm là

$$X_1 = 1 - \sqrt{m+4}, \quad X_2 = 1 + \sqrt{m+4}$$

Suy ra $x_1 = -\sqrt{X_2}, x_2 = -\sqrt{X_1}, x_3 = \sqrt{X_1}, x_4 = \sqrt{X_2}$

Ta có $AB = CD = x_4 - x_3, BC = x_3 - x_2 = 2x_3$.

Chú ý rằng, điều kiện để ba số dương a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác là:

$$\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a \\ c + a > b \end{cases}$$

Do vậy để AB, BC, CD (trong đó có $AB = CD$) là độ dài ba cạnh của một tam giác ta chỉ cần điều kiện:

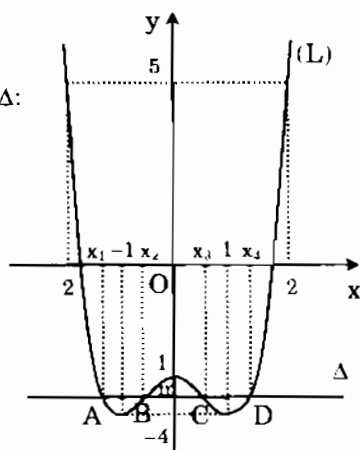
$$AB + CD > BC \Leftrightarrow 2CD > BC \Leftrightarrow 2(x_4 - x_3) > 2x_3 \Leftrightarrow x_4 > 2x_3.$$

Hay $\sqrt{X_2} > 2\sqrt{X_1} \Leftrightarrow X_2 > 4X_1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{m+4} > 4(1 - \sqrt{m+4})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+4} > \frac{3}{5} \Leftrightarrow m+4 > \frac{9}{25} \Leftrightarrow m > -\frac{91}{25}$$

Kết hợp với điều kiện $-4 < m < -3$ ta được $-\frac{91}{25} < m < -3$.

Vậy $-\frac{91}{25} < m < -3$.



Câu 2.

1. Xét phương trình $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ (1)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Để ý rằng } \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 3x - 1}{1 + \tan 3x} \cdot \frac{\tan 3x + 1}{1 - \tan 3x} = -1$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + m2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + m2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{4} + m2\pi \text{ (nhận).}$$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm

$$x = \pi + m2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{4} + m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

2. Xét hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \\ mx + (1 - m)y - 3 = 0 \end{cases}$

Xét phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Do đó phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C) tâm I(2; 1) và bán kính R = 3.

Phương trình $mx + (1 - m)y - 3 = 0$ (2) là phương trình của một đường thẳng, gọi đường thẳng này là Δ .

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow m(x - y) + y - 3 = 0.$$

Phương trình này nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi $x = y = 3$.

Suy ra, đường thẳng Δ luôn đi qua điểm cố định A(3; 3).

Do $IA = \sqrt{(3-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} < 3$, nên điểm A nằm trong đường tròn (C). Như vậy, đường thẳng Δ luôn cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt. Điều này tương đương với hệ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Câu 3.

1. Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos 2x + \cos x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \right)$$

• Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$

Đặt $u = x$, $dv = \cos 2x dx$ ta được $du = dx$, $v = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 0 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

• Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

Đặt $s = x$, $dt = \cos x dx$ ta được $ds = dx$, $t = \sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4} (\pi - 3).$

2. Để tìm các đỉnh của tam giác ABC ta lần lượt giải các hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 3x - 4y + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 36 = 0 \\ 4x + 3y + 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 4x + 3y + 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -13 \end{cases}$$

Các đỉnh của tam giác ABC là: A(4; 12), B(-8; 3), C(4; -13).

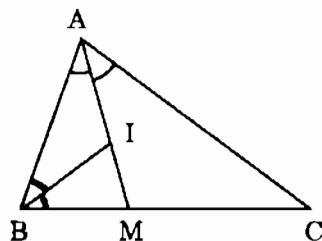
Trong tam giác ABC, kẻ phân giác trong AM và trong tam giác ABM kẻ phân giác trong BI. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{MB} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{MC}$

Trong đó $AB = 15$, $AC = 25$

Suy ra $\overrightarrow{MB} = -\frac{3}{5} \overrightarrow{MC}$

Do đó $\begin{cases} x_M = \frac{-8 + \frac{3}{5} \cdot 4}{1 + \frac{3}{5}} = -\frac{7}{2} \\ y_M = \frac{3 + \frac{3}{5} \cdot (-13)}{1 + \frac{3}{5}} = -3 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{7}{2}; -3\right)$



Ta cũng có $\overline{IA} = -\frac{AB}{BM} \cdot \overline{IM}$. Với $BM = \frac{15}{2}$

Suy ra $\overline{IA} = -2\overline{IM}$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x_1 = \frac{4 + 2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)}{1 + 2} = -1 \\ y_1 = \frac{12 + 2 \cdot (-3)}{1 + 2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-1; 2).$$

Vậy tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là $I(-1; 2)$.

Câu 4.

Đường thẳng Δ có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + t \\ z = -15 - 2t \end{cases}$$

1. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; -5; -15)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $IH \perp AB$ và $IA = 8$.

Ta có $\overline{IM}_0 = (-1; -8; -14) \Rightarrow [\overline{IM}_0, \vec{u}] = (30; -30; 15)$.

Suy ra $|[\overline{IM}_0, \vec{u}]| = 45, |\vec{u}| = 3$

Khoảng cách d từ I đến đường thẳng Δ : $d = \frac{45}{3} = 15$

Do đó bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{IA^2 + d^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 289$.

2. Từ giả thiết suy ra mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(1; -5; -15)$ và có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{k}] = (1; -2; 0) \text{ với } \vec{k} = (0; 0; 1)$$

Phương trình của mặt phẳng (P):

$$1.(x - 1) - 2.(y + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 11 = 0.$$

Câu 5.

1. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{\log x} = 4^{\log y} \\ (4x)^{\log 4} = (3y)^{\log 3} \end{cases}$$

Điều kiện: $x > 0$ và $y > 0$.

$$\bullet 3^{\log x} = 4^{\log y} \Rightarrow \log x \cdot \log 3 = \log y \cdot \log 4 \Leftrightarrow \log x \cdot \log 3 - \log y \cdot \log 4 = 0 \quad (1)$$

$$\bullet (4x)^{\log 4} = (3y)^{\log 3} \Rightarrow \log 4 \cdot \log(4x) = \log 3 \cdot \log(3y) \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \log 4 \cdot (\log x + \log 4) = \log 3 \cdot (\log y + \log 3)$$

$$\Leftrightarrow \log 4 \cdot \log x - \log 3 \cdot \log y = (\log 3)^2 - (\log 4)^2 \quad (3)$$

Giải hệ (1) và (3), ta được:

$$\log x = -\log 4 \text{ và } \log y = -\log 3$$

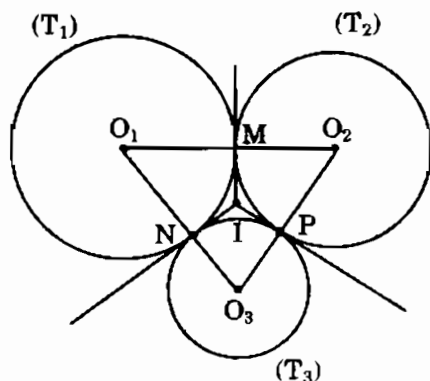
Suy ra: $x = \frac{1}{4}$ và $y = \frac{1}{3}$.

2. a) Ta gọi:

- M là tiếp điểm của (C_1) , (C_2) và (α) là tiếp diện của (C_1) , (C_2) tại M.
- N là tiếp điểm của (C_1) , (C_3) và (β) là tiếp diện của (C_1) , (C_3) tại N.
- P là tiếp điểm của (C_3) , (C_2) và (γ) là tiếp diện của (C_3) , (C_2) tại P.

Mặt phẳng $(O_1O_2O_3)$ là mặt phẳng đối xứng của ba mặt cầu, nên cắt ba mặt cầu này theo ba đường tròn lớn (T_1) , (T_2) , (T_3) với các tiếp điểm là M, N, P.

Các mặt phẳng (α) , (β) , (γ) cắt mặt phẳng $(O_1O_2O_3)$ theo các giao tuyến Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 cũng là các tiếp tuyến của (T_1) , (T_2) , (T_3) , chúng đồng quy tại điểm I. Do các đường tròn (T_1) , (T_2) , (T_3) tiếp ngoài với nhau nên I là tâm đường tròn nội tiếp của $\Delta O_1O_2O_3$.



b) Khoảng cách từ I đến mỗi tiếp điểm chính là bán kính đường tròn nội tiếp của $\Delta O_1O_2O_3$.

Ta có $S = S_{O_1O_2O_3} = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p}$. Trong đó:

$$p = \frac{1}{2} [(R_1 + R_2) + (R_2 + R_3) + (R_3 + R_1)] = R_1 + R_2 + R_3.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p-a = p - (R_1 + R_2) = R_3,$$

$$p-b = R_1, p-c = R_2.$$

$$\text{Do đó } S = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3) \cdot R_1 R_2 R_3}$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{\sqrt{(R_1 + R_2 + R_3) \cdot R_1 R_2 R_3}}{R_1 + R_2 + R_3} = \sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}.$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ I đến mỗi tiếp điểm là } r = \sqrt{\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}.$$

ĐỀ 45

Câu 1.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$$

2. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
3. Xác định các giá trị của m để phương trình sau

$$|x^4 - 3x^2 - 4| = m$$

có sáu nghiệm phân biệt.

Câu 2.

1. Giải phương trình $3\tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$.

2. Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 3.

1. Gọi $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) Tính I_1 và I_2 .

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-2} ($n \geq 3$)

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 9 = 0$

$$\text{và (T): } x^2 + y^2 - 10x + 8y + 36 = 0$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S):

$x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 2 = 0$ và hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có phương trình:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 7 + t \\ z = -9 + 2t \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = -8 - t \\ y = 12 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Câu 5.

1. Giải bất phương trình: $3.25^{\ln x+1} - 152.15^{\ln x} + 5.9^{\ln x+1} \leq 0$

2. Cho tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng để tồn tại bốn mặt cầu có tâm A, B, C, D và tiếp xúc với nhau từng đôi một, điều kiện cần và đủ là

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

- b) Chứng tỏ rằng nếu điều kiện trên được nghiệm đúng thì tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với tất cả sáu cạnh của hình tứ diện.

Giải

Câu 1.

1. Khảo sát hàm số $y = f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ (độc giả tự giải)
2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm $A(2; 0)$, $B(-2; 0)$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 6x$

Suy ra $f'(2) = 20$, $f'(-2) = -20$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(2; 0)$:

$$y = 20(x - 2)$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $B(-2; 0)$:

$$y = -20(x + 2)$$

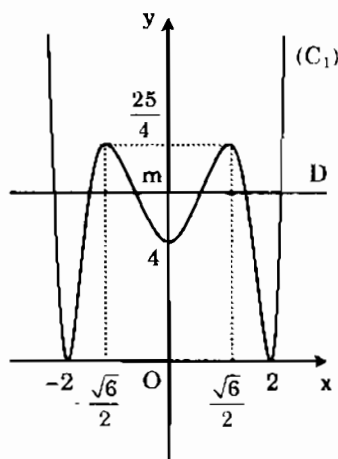
3. Xét phương trình $|x^4 - 3x^2 - 4| = m$ (*)

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số

$$y = |x^4 - 3x^2 - 4| \quad (C_1) \text{ và } y = m \quad (D)$$

Đồ thị (C_1) của hàm số $y = |x^4 - 3x^2 - 4|$ được suy từ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$ và có dạng như hình bên.

Dựa vào đồ thị ta thấy ngay, phương trình (*) có sáu nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $4 < m < \frac{25}{4}$



Câu 2.

1. Xét phương trình $3\tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$ (1)

Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3(1 + \tan^2 x) + 2 = \frac{7}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\cos^2 x} + 2 = \frac{7}{\cos x} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 3 \text{ (loại)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm: $x = \pm \frac{\pi}{3} + m2\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$)

2. Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$

Điều kiện $-1 < x < 1$

Đặt $u = \sqrt{1-x^2} > 0$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{u} = 2\sqrt{2} \\ x^2 + u^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + u = 2\sqrt{2}xu \quad (1) \\ x^2 + u^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x+u)^2 - 2xu = 1 \quad (3)$$

$$\text{Thế (1) và (3): } 8(xu)^2 - 2xu - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xu = \frac{1}{2} \\ xu = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

• Nếu $xu = \frac{1}{2}$ thì $x + u = \sqrt{2}$. Do đó x, u là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - \sqrt{2}t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (nghiệm kép)}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• Nếu $xu = -\frac{1}{4}$ thì $x + u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó x, u là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \\ t = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } x = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm: } x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Câu 3.

1. Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{a) } * I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$* I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x - 1) dx = (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

b) Ta viết $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x ((1 + \tan^2 x) - 1) dx$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) dx - I_{n-2}$$

Mà $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x d(\tan x) = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n-1}$

Suy ra: $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \Leftrightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \quad (n \geq 3)$

c) Ta đã chứng minh $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \quad (*)$

Ta có $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1$

Do đó $0 \leq \tan^n x \leq \tan^{n-2} x$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{4}$. Thế nên ta luôn có $I_n < I_{n-2}$

• $I_n < I_{n-2} \Rightarrow 2I_n < \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow I_n < \frac{1}{2(n-1)}$

• $I_n < I_{n-2} \Rightarrow 2I_{n-2} > \frac{1}{n-1}$

Thay n bằng $n+2$ ta được $2I_n > \frac{1}{n+1}$

Vậy $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)} \quad (n \geq 3)$

2. (C): $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 9 = 0$ và (T): $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 36 = 0$

Đường tròn (C) có tâm $I_1(2; 5)$ và bán kính $R_1 = 2\sqrt{5}$

Đường tròn (T) có tâm $I_2(5; -4)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{5}$

Khoảng cách giữa hai tâm của (C) và (T):

$$d = I_1 I_2 = 3\sqrt{10} > R_1 + R_2.$$

Như vậy (C) và (T) ngoài nhau. Do đó hai đường tròn này có bốn tiếp tuyến chung.

• Gọi A là giao điểm của hai tiếp tuyến chung trong, ta có:

$$\overline{AI_1} = -\frac{R_1}{R_2} \overline{AI_2} = -2 \overline{AI_2}$$

Tọa độ của A: $\begin{cases} x_A = \frac{2+2.5}{1+2} = 4 \\ y_A = \frac{5+2.(-4)}{1+2} = -1 \end{cases} \Rightarrow A(4; -1)$

Phương trình của đường thẳng Δ đi qua A có dạng:

$$a(x - 4) + b(y + 1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 4a + b = 0$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) và (T) khi và chỉ khi:

$$d(I_1, \Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|a \cdot 2 + b \cdot 5 - 4a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{5} \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow |-a + 3b| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow -4a^2 - 6ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0$$

Cho $b = 2$ thì được: $a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4 \end{cases}$

Suy ra phương trình hai tiếp tuyến chung trong của (C) và (T) là:

$$x + 2y - 2 = 0, \quad 2x - y - 9 = 0 \quad (1)$$

• Gọi B là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài, ta có:

$$\overline{BI_1} = \frac{R_1}{R_2} \overline{BI_2} = 2\overline{BI_2}$$

Tọa độ của B:
$$\begin{cases} x_B = \frac{2 - 2.5}{1 - 2} = 8 \\ y_B = \frac{5 - 2 \cdot (-4)}{1 - 2} = -13 \end{cases} \Rightarrow B(8; -13)$$

Phương trình của đường thẳng (D) đi qua B có dạng:

$$\alpha(x - 8) + \beta(y + 13) = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y - 8\alpha + 13\beta = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

Đường thẳng (D) tiếp xúc với (C) và (T) khi và chỉ khi:

$$d(I_1, (D)) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 5 - 8\alpha + 13\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |-3\alpha + 9\beta| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow \alpha^2 - 9\alpha\beta + 19\beta^2 = 0$$

Cho $\beta = 1$ thì được: $\alpha^2 - 9\alpha + 19 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$

Suy ra phương trình hai tiếp tuyến chung ngoài của (C) và (T) là:

$$\frac{9 + \sqrt{5}}{2}x + y - 4\sqrt{5} - 23 = 0, \quad \frac{9 - \sqrt{5}}{2}x + y + 4\sqrt{5} - 23 = 0 \quad (2)$$

Tóm lại, có bốn tiếp tuyến chung của (C) và (T) định bởi (1) và (2).

Câu 4. $\Delta_1: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 7 + t \\ z = -9 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -8 - t \\ y = 12 + 2t \\ z = t \end{cases}$

• Ta có (S): $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 3$. Suy ra (S) có tâm $I(0; 0; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$

• Các đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (1; 1; 2)$ và $\vec{v} = (-1; 2; 1)$

Gọi (P) là mặt phẳng song song với Δ_1 và Δ_2 , một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-3; -3; 3), \vec{n} \text{ cùng phương với vector } \vec{n}' = (1; 1; -1)$$

Phương trình của mặt phẳng (P) có dạng $x + y - z + D = 0$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|0+0-1+D|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow |-1+D| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 4 \\ D = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$x + y - z + 4 = 0 \text{ hoặc } x + y - z - 2 = 0$$

Câu 5.

1. Xét bất phương trình:

$$3.25^{\ln x + 1} - 152.15^{\ln x} + 5.9^{\ln x + 1} \leq 0 (*)$$

Bất phương trình (*) tương đương với bất phương trình:

$$75.5^{2\ln x} - 152.5^{\ln x}.3^{\ln x} + 45.3^{2\ln x} \leq 0 \Leftrightarrow 75.\left(\frac{5}{3}\right)^{2\ln x} - 152.\left(\frac{5}{3}\right)^{\ln x} + 45 \leq 0$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{\ln x}$ ($t > 0$), ta được bất phương trình:

$$75t^2 - 152t + 45 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9}{25} \leq t \leq \frac{5}{3}$$

$$\text{Suy ra } \frac{9}{25} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{\ln x} \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^2} \leq x \leq e$$

Vậy đáp số là $\frac{1}{e^2} \leq x \leq e$.

2. a) Gọi bán kính các mặt cầu tâm A, B, C, D lần lượt là R_1, R_2, R_3, R_4 .

Mặt cầu (A) tiếp xúc với mặt cầu (B), (C), (D) tại H, I, J; mặt cầu (B) tiếp xúc với các mặt cầu (C), (D) tại K, L; hai mặt cầu (C) và (D) tiếp xúc với nhau tại M.

Như vậy ta có:

$$AB + CD = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

$$AC + BD = R_1 + R_3 + R_2 + R_4,$$

$$AD + BC = R_1 + R_4 + R_2 + R_3.$$

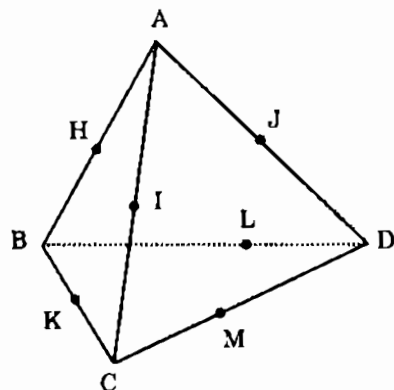
Vậy $AB + CD = AC + BD = AD + BC (*)$

Đảo lại: Giả sử có điều kiện (*), ta sẽ chứng minh có 4 mặt cầu bán kính

R_1, R_2, R_3, R_4 sao cho $R_1 + R_2 = AB, R_2 + R_3 = BC, R_3 + R_1 = AC,$

$R_1 + R_4 = AD, R_2 + R_4 = BD, R_3 + R_4 = CD.$

Thật vậy, ta xét các số R_1, R_2, R_3, R_4 xác định như sau:



$$R_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}, R_2 = \frac{AB + BC - AC}{2},$$

$$R_3 = \frac{BC + AC - AB}{2} \text{ và } R_4 = AD - R_1.$$

$$\text{Ta có } R_4 = AD - R_1 = AD - \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{2AD - AB - AC + BC}{2}$$

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{AD + (AD + BC) - (AB + AC)}{2} \\ &= \frac{AD + (AB + CD) - (AB + AC)}{2} = \frac{AD + CD - AC}{2} \end{aligned}$$

Như vậy các số R_1, R_2, R_3, R_4 được xác định như trên đều là các số dương.

Ta dễ thấy: $R_1 + R_2 = AB, R_2 + R_3 = BC, R_3 + R_1 = AC, R_1 + R_4 = AD$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác ta có: } R_2 + R_4 &= \frac{AB + BC - AC}{2} + \frac{AD + CD - AC}{2} \\ &= \frac{1}{2} [(AB + CD) + (AD + BC) - 2AC] \end{aligned}$$

$$R_2 + R_4 = \frac{1}{2} [2(AC + BD) - 2AC] = BD$$

Chứng minh tương tự: $R_3 + R_4 = CD$

Do đó các mặt cầu tâm A, B, C, D có bán kính R_1, R_2, R_3, R_4 tiếp xúc với nhau từng đôi một.

Vậy bài toán được chứng minh.

- b) Từ các kết quả trên ta suy ra K, L, M là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trong $\triangle BCD$ tiếp xúc với các cạnh của tam giác này.

Gọi A_1, B_1 là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BCD và ACD, ta có:

$CD \perp A_1M$ và $CD \perp B_1M$ nên $CD \perp (A_1B_1M)$.

Qua A_1 kẻ đường thẳng Δ_1 vuông góc với mặt phẳng (BCD) và qua B_1 dựng đường thẳng Δ_2 vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cùng nằm trong mặt phẳng (A_1B_1M) nên chúng cắt nhau. Gọi O là giao điểm của Δ_1 và Δ_2

Do $A_1K = A_1M = A_1L$ nên $OK = OM = OL$

$B_1I = B_1M = B_1J$ nên $OI = OM = OJ$

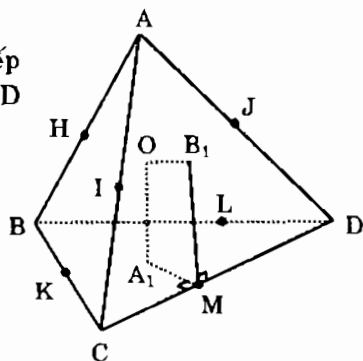
Suy ra $OK = OM = OL = OI = OJ$. Như thế điểm O cách đều các cạnh BC, CD, BD, AC, AD.

Do đó tồn tại mặt cầu (O) tâm O tiếp xúc với 5 cạnh BC, CD, BD, AC, AD.

Lập luận tương tự với hai tam giác BCD và ABC thì tồn tại mặt cầu (O') tâm O' tiếp xúc với BC, CD, BD, AB, AC tại K, M, L, I, H.

Rõ ràng hai mặt cầu (O) và (O') bằng nhau. (vì cùng qua 4 điểm K, M, L, I)

Vậy tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện ABCD.



MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU..... 3

ĐỀ 1.....	5
ĐỀ 2.....	10
ĐỀ 3.....	14
ĐỀ 4.....	19
ĐỀ 5.....	24
ĐỀ 6.....	28
ĐỀ 7.....	33
ĐỀ 8.....	38
ĐỀ 9.....	44
ĐỀ 10.....	49
ĐỀ 11.....	54
ĐỀ 12.....	57
ĐỀ 13.....	63
ĐỀ 14.....	68
ĐỀ 15.....	73
ĐỀ 16.....	77
ĐỀ 17.....	82
ĐỀ 18.....	87
ĐỀ 19.....	91
ĐỀ 20.....	96
ĐỀ 21.....	101
ĐỀ 22.....	107

ĐỀ 23.....	113
ĐỀ 24.....	118
ĐỀ 25.....	124
ĐỀ 26.....	129
ĐỀ 27.....	134
ĐỀ 28.....	140
ĐỀ 29.....	143
ĐỀ 30.....	147
ĐỀ 31.....	152
ĐỀ 32.....	157
ĐỀ 33.....	162
ĐỀ 34.....	167
ĐỀ 35.....	172
ĐỀ 36.....	178
ĐỀ 37.....	183
ĐỀ 38.....	187
ĐỀ 39.....	193
ĐỀ 40.....	199
ĐỀ 41.....	206
ĐỀ 42.....	211
ĐỀ 43.....	216
ĐỀ 44.....	222
ĐỀ 45.....	228

45 BỘ ĐỀ ÔN LUYỆN THI ĐẠI HỌC môn TOÁN

Nhà giáo Ưu tú Trần Minh Quới

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**
Khu phố 6, P. Linh Trung, Q. Thủ Đức, TP HCM
Số 3 Công trường Quốc tế, Q. 3, TP HCM
ĐT: 38239172 - 38239170
Fax: 38239172; Email: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản:
TS HUỖNH BÁ LÂN
Biên tập: **THÂN THỊ HỒNG**
Sửa bản in: **NGUYỄN ĐỨC MAI LÂM**
Bản quyền thuộc: *Nhà sách Minh Trí
Trình bày bìa: **HS. ĐỖ DUY NGỌC**

TK.02. T (V) 191-2010/CXB/492-08
ĐHQG. HCM - 10

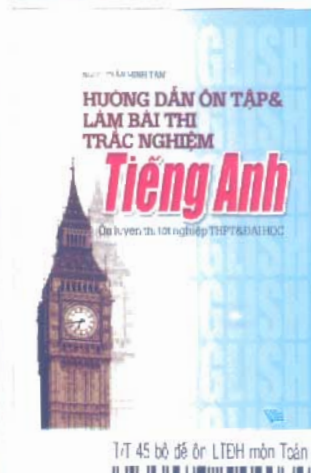
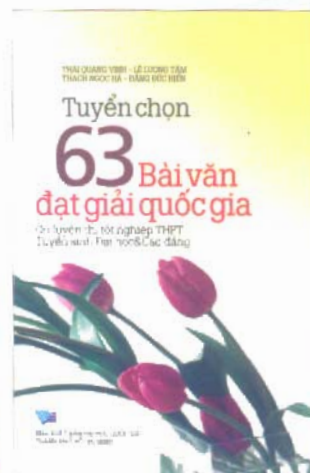
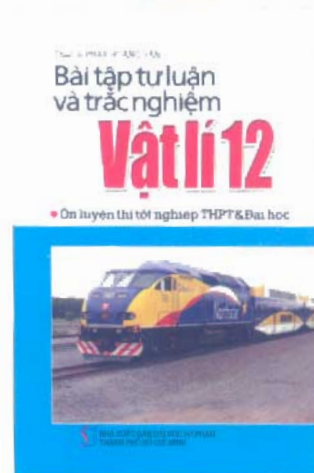
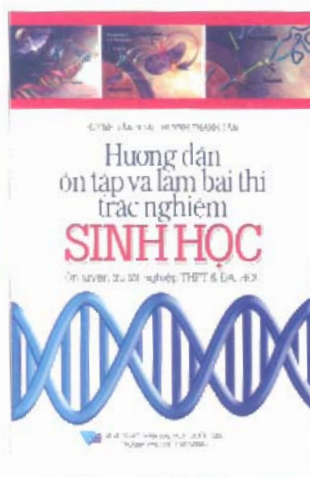
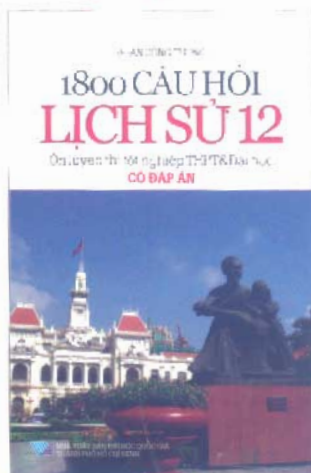
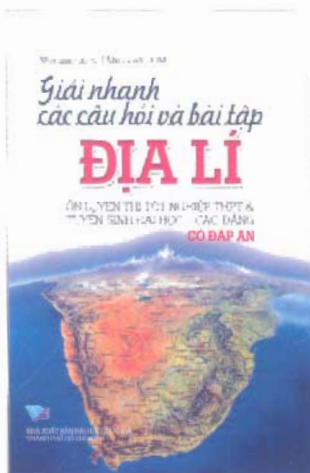
T.TK. 825 - 10 (T)

In tái bản 2.000 bản, khổ 16x24 cm. Số đăng ký KHXB: 191-2010/CXB/492-08
Quyết định xuất bản số: 614/QĐ - ĐHQG TPHCM ngày 07.12.2010
In tại Cty In Song Nguyên, nộp lưu chiểu qui 1 năm 2011.



Nhà sách MINH TRÍ

GIỚI THIỆU BỘ SÁCH LUYỆN THI ĐẠI HỌC



36-38-40 NGUYỄN HỮU - P. TÂN THÀNH - Q. TÂN PHÚ - TP. HỒ CHÍ MINH
ĐT - FAX: 08.38100574 - 54449354 - 54446746
Email: vietbookscapany@yahoo.com

T/T 45 bộ đề ôn LTHH môn Toán



Giá: 44.000 đ